UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 6/6/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1+x_2+x_3=0\}$ considerare $f : X \to X$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot x$. Trovare il polinomio caratteristico di f, i suoi autovalori e una base che la diagonalizza.

2. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 1-k^2 & k^2+k+1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

3. In $\mathbb{R}^2$ considerare il prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ e la norma associata. Trovare tutti i vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ rispetto a tale prodotto scalare e unitari rispetto a tale norma.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare su $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} t+4 & t^2+1 \\ t+7 & 13 \end{pmatrix}$ risulta un prodotto scalare.

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della quadrica $kx^2 + (k^2-1)y^2 + z^2 = k-2$.

6. Esibire oppure dimostrare che non esistono due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^7(\mathbb{R})$ di dimensioni rispettive 3 e 4 e che si incontrano in un solo punto.

7. Calcolare $\int_\alpha \frac{2xy^3}{1+x^2y^4}(y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1+2t^2 \\ 1+t^3 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♡ 5. ♡ 6. ♢ 7. ♡ 8. ♠ 9. ♡ 10. ♢

Modulo di "Geometria" — Scritto del 6/6/23 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 7k+10 & 4k+4 & -4k-4 \\ 2k^2-3k-12 & 2k^2-2k-4 & -k^2+2k+6 \\ 2k^2+7k-2 & 2k^2+4k-1 & -k^2-4k+3 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A) = -2k^4 - k^3 + 6k^2 - 2k + 20$.

(B) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore k^2+2, trovare gli altri.

(C) (3 punti) Al variare di k determinare la molteplicità algebrica degli autovalori di A.

(D) (4 punti) Al variare di k determinare la molteplicità geometrica degli autovalori di A stabilendo se essa sia o meno diagonalizzabile.

2. Considerare la curva orientata $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - t^3 \\ \log(t) - t^2 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è regolare.

(B) (4 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = \frac{1}{2}$.

(C) (3 punti) Determinare il segno della curvatura di α per ogni t.

(D) (4 punti) Calcolare $\int_\beta x \, \mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[1, 2]$.

1. ♠ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♡ 5. ♡ 6. ♢ 7. ♡ 8. ♠ 9. ♡ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di “Geometria” — Scritto del 6/6/23 — Quesiti

Risposte ai quesiti

7. ♡

1. $p_f(t) = t^2 + 6t + 5$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$; $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $k \neq 2$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$

4. $t = -2$

5. Degenere per $k = 0, 1, -1, 2$; iperboloide ellittico per $k < -1$ e per $0 < k < 1$; iperboloide iperbolico per $-1 < k < 0$; vuoto per $1 < k < 2$; ellissoide per $k > 2$

6. $Y = \{[x] \in \mathbb{P}^7(\mathbb{R}) : \ x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0\}$, $Z = \{[x] \in \mathbb{P}^7(\mathbb{R}) : \ x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$

7. $\log(145) - \log(2)$

1. ♠ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♡ 5. ♡ 6. ♢ 7. ♡ 8. ♠ 9. ♡ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

7. ♡

1.

(A) Sostituendo alla terza colonna sé stessa più la seconda, raccogliendo k^2+2 dalla terza colonna, sostituendo alla seconda riga sé stessa meno la terza, sviluppando lungo la terza colonna e calcolando un determinante 2×2 si trova $(k^2+2)(-2k^2-k+10)$ da cui facilmente la conclusione

(B) $2-k$ e $2k+5$

(C)
- Per $k \neq -1, 0, 3$ autovalori $k^2+2,\ 2-k,\ 2k+5$ con molteplicità algebrica 1
- Per $k=-1$ autovalore 3 con m. a. 3
- Per $k=0$ autovalore 2 con m.a. 2 e autovalore 5 con m.a. 1
- Per $k=3$ autovalore 11 con m.a. 2 e autovalore -1 con m.a. 1

(D)
- Per $k \neq -1, 0, 3$ autovalori $k^2+2,\ 2-k,\ 2k+5$ con molteplicità geometrica 1; diagonalizzabile
- Per $k=-1$ autovalore 3 con m.g. 2; non diagonalizzabile
- Per $k=0$ autovalore 2 con m.g. 2 e autovalore 5 con m.g. 1; diagonalizzabile
- Per $k=3$ autovalore 11 con m.g. 1 e autovalore -1 con m.g. 1; non diagonalizzabile

2.

(A) La prima componente di $\alpha'(t)$ si annulla solo per $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e la seconda solo per $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $\frac{96}{17\sqrt{17}}$

(C) Positiva su $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$, nulla agli estremi, negativa fuori

(D) $\frac{32}{5}$