UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 27/6/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $X = \{x \in \mathbb{N} : \ x \leqslant 10\}$ e Y l'alfabeto italiano, considerare $f : X \to Y$ dove $f(x)$ è la seconda lettera della parola con cui si scrive x in italiano. Determinare $\{x \in X : \ f^{-1}(f(x)) = \{x\}\}$.

2. Calcolare $\dfrac{\log(3)}{\log(2)} \cdot \dfrac{\log_3(6)}{\log_2(6)}$.

3. Posto $a_n = \sqrt{n^2 - 1}$ e $b_n = a_{n+1} - a_n$ calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

4. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \cos(\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{-2x}}$.

5. Trovare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ sul quale l'espressione $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$ definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$. Dire per quali $x \in D$ esiste $f'(x)$ ed esplicitarne l'espressione.

6. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{x} + \log(1+x)}{x^2}$.

7. Determinare gli intervalli su cui la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^4 + 2x^3 - 36x^2$ è concava e quelli su cui è convessa.

8. Verificare che alla funzione $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 - \log(x) - 2$ si applica il metodo iterativo di ricerca di uno zero con l'impiego delle tangenti al grafico. Da quale estremo bisogna partire?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 27/6/23 — Esercizio

Considerare l'espressione

$$f(x) = \frac{3^x - 1}{3^{2x} - 9}.$$

(A) (1 punto) Determinare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ su cui essa definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (1 punto) Trovare tutti gli zeri di f.

(C) (3 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D.

(D) (3 punti) Provare che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in D$.

(E) (1 punto) Dire se f sia decrescente su D.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. $\{1,\ 3,\ 8,\ 9\}$

2. 1

3. 1

4. $\frac{1}{2}$

5. $D = [0, 1]$; esiste $f'(x)$ per $x \in (0, 1)$ e $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

6. -1

7. Concava su quelli contenuti in $[-3, 2]$, convessa su quelli contenuti in $(-\infty, -3]$ e in $[2, +\infty)$

8. $f(1) < 0 < f(2)$; $f'(x) > 0\ \forall x$; $f''(x) > 0\ \forall x$; dal secondo

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(B) $x = 0$

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty} = \frac{1}{9}$, $\lim\limits_{x\to1^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$

(D) $f'(x)$ è un multiplo negativo di $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 9$ e il polinomio $t^2 - 2t + 9$ è sempre positivo

(E) No: $0 < 2$ ma $f(0) = 0 < \frac{1}{9} = f(2)$