UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 15/12/22 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $a_n = n + (-1)^n \cdot \frac{7}{n}$ dire se esista $N \in \mathbb{N}$ tale che $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ è monotona.

2. Dire quante combinazioni di semi diverse si possono ottenere pescando 5 carte da un mazzo da 40. [Una combinazione di semi è ad esempio "due spade, due coppe, una bastoni": non conta l'ordine, non contano i numeri delle carte.]

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1+\tan^2(x)\right)}{\cos(x)-1}$.

4. Provare che la funzione $f : [1, 7] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x - 4\log(1+x)$ ha massimo e minimo assoluti e individuare i punti in cui li assume.

5. Per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \cos(x) \cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}$ dire per quali x esiste $f'(x)$, trovarne l'espressione e dire dove si annulla.

6. Determinare tutti gli intervalli su cui l'espressione $f(x) = 1 + \mathrm{sgn}(x) \cdot e^{-1/x} - x^2$ definisce una funzione continua o estendibile con continuità. Provare inoltre che esistono intervalli su cui si può applicare a tale estensione il teorema di esistenza degli zeri.

7. Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ sia convergente.

8. Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Determinare i suoi punti di flesso.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 15/12/22 — Esercizio

Considerare l'espressione $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^2+x-2}$.

(A) (1 punto) Determinare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ su cui essa definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$

(B) (1 punto) Trovare tutti gli zeri di f.

(C) (2 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D.

(D) (2 punti) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f.

(E) (2 punti) Determinare gli intervalli di convessità e di concavità di f.

(F) (1 punto) Sulla base delle informazioni precedenti tracciare il grafico approssimativo di f.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. Sì, basta prendere $N = 15$; per $n \geqslant N$ si ha $\left|(-1)^n \cdot \frac{7}{n}\right| < \frac{1}{2}$, dunque l'intero più vicino ad a_n è n, da cui segue che la successione cresce

2. 56

3. -2

4. Minimo in $x = 3$, massimo in $x = 7$

5. $f(x) = \left(\cos^2(x) - \sin(x)\right) \cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}$ esiste per ogni x e si annulla per $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi$ e per $x = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

6. Tutti quelli contenuti in $(-\infty, 0)$ o in $[0, +\infty)$. Il teorema si applica su qualche $[0, b]$ per b grande poiché l'estensione di f su $[0, +\infty)$ ha limite 1 in 0 e $-\infty$ in $+\infty$

7. No: il termine n-esimo ha radice n-esima $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ che tende a $\mathrm{e} > 1$

8. $x = -2 \pm \sqrt{3}$ e $x = 1$

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

(B) $x = -\frac{5}{3}$

(C) $0^\pm$ in $\pm\infty$
$-\infty$ in $(-2)^-$ e 1^+
$+\infty$ in $(-2)^+$ e 1^-

(D) Decrescente su tutti gli intervalli contenuti in D

(E) Concava su quelli contenuti in $(-\infty, -2)$ e in $[-1, 1)$; convessa su quelli contenuti in $(-2, -1]$ e in $(1, +\infty)$