UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 6/12/22 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Dimostrare per induzione che $2^{2n} - 1$ è divisibile per 3 per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$.

2. Scrivere in forma polare il numero complesso $z = 2\sqrt{3}i - 2$.

3. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\log(x^2)}$.

4. Determinare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ tale che l'espressione $f(x) = 5^{\mathrm{tg}(x)}$ definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, e calcolare la derivata di f dove esiste.

5. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$ calcolare, se esiste, $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\log(e^x + x)}{x^\alpha}$.

6. Calcolare $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos(x)}{3\sin(x)}$.

7. Per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin(x - \pi)$ determinare gli intervalli di convessità e di concavità.

8. Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n)}$ converge e/o se converge assolutamente.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 6/12/22 — Esercizio

Considerare l'espressione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}.$$

(A) (1 punto) Determinare il più grande insieme D su cui essa definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (3 punti) Trovare tutti gli asintoti del grafico di f.

(C) (1 punto) Determinare tutti gli zeri di f.

(D) (4 punti) Trovare tutti i punti di massimo e di minimo relativo di f.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. Poniamo $f(n) = 2^{2n} - 1$. Passo base: per $n = 1$ abbiamo $f(1) = 3$, che è divisibile per 3. Passo induttivo: supponiamo che $f(n)$ sia divisibile per 3, dunque $f(n) = 3k$ con $k \in \mathbb{N}$; allora

$$f(n+1) = 2^{2(n+1)} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = 3 \cdot 2^{2n} + 2^{2n} - 1 = 3 \cdot 2^{2n} + f(n) = 3 \cdot 2^{2n} + 3k = 3 \cdot \left(2^{2n} + k\right)$$

è divisibile per 3

2. $z = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$

3. $-\frac{1}{2}$

4. $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$; per ogni $x \in D$ si ha che $f'(x)$ esiste e vale $\frac{\log(5) 5^{\operatorname{tg}(x)}}{\cos^2(x)}$

5. $\begin{cases} +\infty & \text{per } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{per } \alpha = 1 \\ 0 & \text{per } \alpha > 1 \end{cases}$

6. $\frac{1}{3}$

7. Convessa su $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, concava su $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

8. Converge per il criterio di Leibniz, ma non converge assolutamente perché $\frac{1}{\log(n)} > \frac{1}{n}$ per $n \geq 3$.

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(B) Verticale $x = 0$; obliquo sinistro e obliquo destro $y = x$.

(C) $x = 0$.

(D) Massimo relativo in $x = -\sqrt{2}$, minimo relativo in $x = \sqrt{2}$.