IST MAT I - CIA 17/11/2022

FOGLIO 5

ES 1

SIA $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \notin D$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$$

$$f_0 : D_0 = D \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & x \in D \\ y_0 & x = x_0 \end{cases}$$

ESTENSIONE DI f PER CONTINUITÀ IN x_0

DIMOSTRARE CHE f_0 È CONTINUA IN x_0.

OVVERO $\lim_{x \to x_0} f_0(x) = f_0(x_0) = y_0$.

OVVERO $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f_0(x) - y_0| < \varepsilon$ PER $|x - x_0| < \delta$. (1)

PER IPOTESI $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

Ovvero $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - y_0| < \varepsilon$ per $|x - x_0| < \delta$ (2)

Fisso $\varepsilon > 0$

Studio $|f_0(x) - y_0| < \varepsilon$

Ovvero
$$\begin{cases} |f(x) - y_0| < \varepsilon & x \in D \\ |f_0(x_0) - y_0| = |y_0 - y_0| = 0 < \varepsilon & x = x_0 \end{cases}$$

Sempre verificata, perché $\varepsilon > 0$

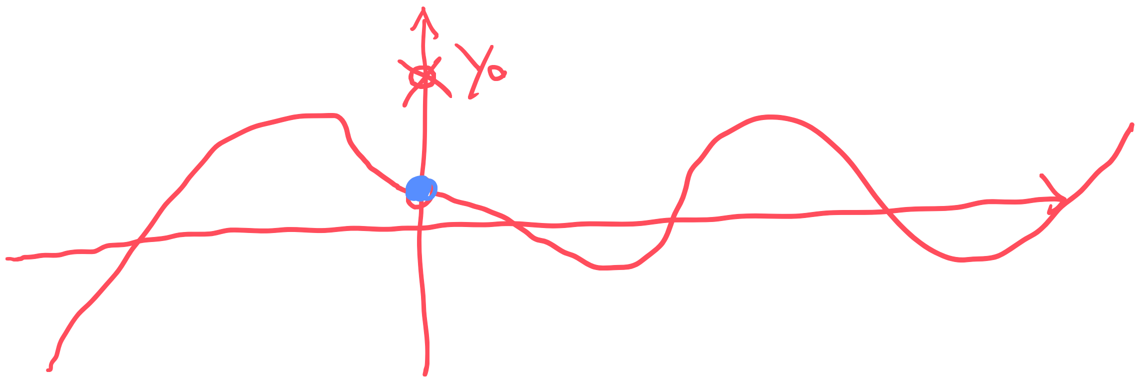
Uso (2). $\exists \delta > 0 : |f(x) - y_0| < \varepsilon$ per $|x - x_0| < \delta$

Ovvero vale (1) $\square$

Cosa **NON** fare!

$\lim_{x \to x_0} f_0(x) = f_0(x_0) = y_0$ ✓

$x_0 = 0$



$\lim_{x \to 0} f_0(x) = \quad \neq f_0(0) \Rightarrow f_0$ NON È CONTINUA IN 0

ES 2 $\quad f : D \to \mathbb{R}$

- DETERMINARE DOVE f È CONTINUA
- " " f PUÒ ESSERE ESTESA PER CONTINUITÀ

a) $f(x) = \sin x + \tan x$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\left.\begin{array}{l} \sin x \text{ È CONTINUA SU TUTTO } \mathbb{R} \\ \tan x \text{ È CONTINA SU } D \end{array}\right\}$ $f(x)$ È CONTINUA SU D

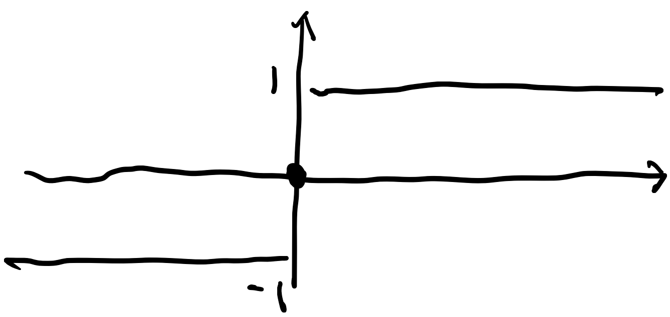
$f(x)$ PUÒ ESSERE ESTESA IN $x_0 = \frac{\pi}{2}$? NO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^{\pm}} \sin x + \tan x = \mp \infty$$

NON È FINITO.

b) $f(x) = \operatorname{Sgn}(x) + x - 1$

$$\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



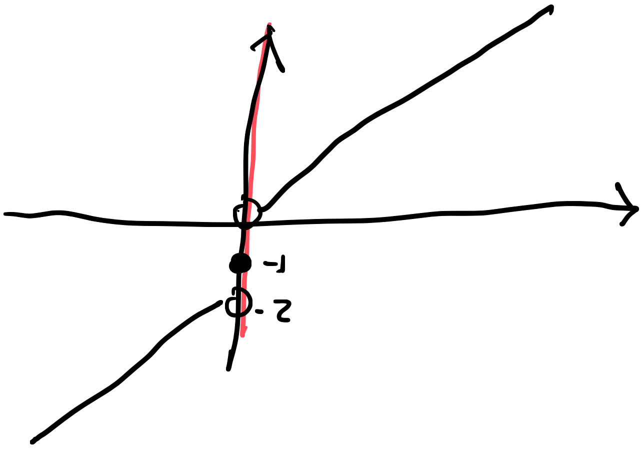
$D = \mathbb{R}$

DOVE' CONTINUA? $\quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$

$Sgn(x)$ È CONTINUA SU $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \Rightarrow f(x)$ ANCHE

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad f(0) = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 0 \\ -1 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$



LIMITI DISTINTI $\rightarrow \lim_{x \to 0} f(x)$ NON ESISTE

$\Rightarrow f(x)$ NON SI PUÒ ESTENDERE IN $x_0 = 0$

c) $f(x) = Sgn(x) \sin(x^2)$

$D = \mathbb{R}$

DOVE È CONTINUA? $\quad \{x \notin \mathbb{R} : x \neq 0\}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} Sgn(x) \sin(x^2) = ?$$

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x^2) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \sin(x^2) & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad f(0) = 0$$

QUINDI $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f$ È CONTINUA IN ZERO

$\Rightarrow f$ È CONTINUA SU $\mathbb{R}$

d) $$f(x) = \frac{1}{\sin(3x)}$$

$$D = \{x\in\mathbb{R} : \sin(3x) \neq 0\} = \{x\in\mathbb{R} : 3x \neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : x \neq k\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\}$$

f È CONTINUA SU D. ($\sin(3x)$ È CONTINUA SU $\mathbb{R}$)

f SI PUÒ ESTENDERE IN $\frac{\pi}{3}$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{?}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ NON ESISTE

$\Downarrow$

$f(x)$ NON SI PUÒ ESTENDERE IN $0 + k\frac{\pi}{3}$