Ist. Mat. I - CIA
27/10/22

$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall (a_n)_{n=0}^{\infty}$ t.c. $a_n \to c$ si ha $f(a_n) \to L$

(caso $c \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $|x-c| < \delta$ ①

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ t.c. $|a_n - c| < \varepsilon$ per $n \geq N$ ②

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ t.c. $|f(a_n) - L| < \varepsilon$ per $n \geq N$ ③

$\boxed{\Rightarrow}$ Dato $\varepsilon > 0$ $\exists \delta$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $|x - c| < \delta$ ①
Usiamo ②: $\exists N$ t.c. $|a_n - c| < \delta$ per $n \geq N$;
dunque $|f(a_n) - L| < \varepsilon$ per $n \geq N$: verificato ③

$\boxed{\Leftarrow}$ Per assurdo, neghiamo ①: $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta > 0$ $\exists x$ t.c. $|x - c| < \delta$ ma $|f(x) - L| > \varepsilon$.

Vogliamo dedurre una violazione dell'enunciato a dx, dunque trovare (a_n) t.c. $a_n \to c$ ma $f(a_n) \not\to L$: uso l'ipotesi dell'assurdo con $\delta = 2^{-n}$: $\exists a_n$ t.c. $|a_n - c| < 2^{-n}$ ma $|f(a_n) - L| > \varepsilon$. Finito.

Limiti notevoli:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

$\frac{0}{0}$

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))}$$

$$= \underbrace{\frac{\sin^2(x)}{x^2}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos(x)}}_{\downarrow\, \frac{1}{2}}$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

1^{∞}

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$$

$\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{x}\cdot\log(1+x) = \lim_{y\to\pm\infty} y\cdot\log\left(1+\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\pm\infty} \log\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)$$

sostituisco $y=\frac{1}{x}$

$$= \log(e) = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}$$ $\frac{0}{0}$

Se $\alpha \in \mathbb{N}$ segue dalla potenza del binomio.

Infatti: $1 = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}$ sostituisco $y = (1+x)^\alpha - 1$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(1+x)^\alpha - 1)}{(1+x)^\alpha - 1} = \lim_{x\to 0} \alpha \cdot \frac{\log(1+x)}{(1+x)^\alpha - 1}$$

$$= \alpha \cdot \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\downarrow \; 1} \cdot \frac{x}{(1+x)^\alpha - 1}$$

$\Rightarrow$ OK

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$ $\frac{0}{0}$

$1 = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}$ sostituisco $y = e^x - 1$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}$$

Conseguenza: in una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ in 0 posso sostituire (se ci sono):

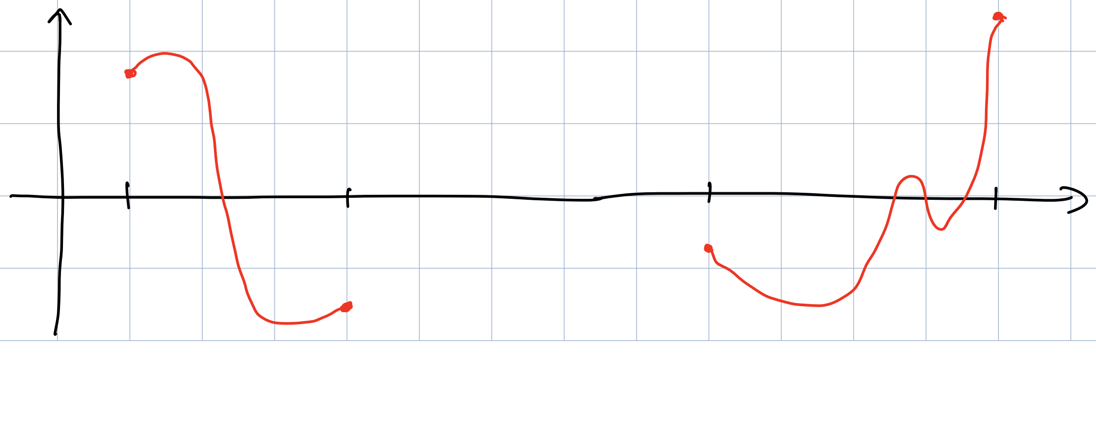
$$\sin(x) \rightsquigarrow x$$
$$1-\cos(x) \rightsquigarrow \frac{1}{2}x^2$$
$$e^x - 1 \rightsquigarrow x$$
$$\log(1+x) \rightsquigarrow x$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \rightsquigarrow \alpha \cdot x$$

se facendo ciò trovo una forma determinata, ok, ho il limite; se no .... (altri metodi più avanti).

Proprietà globali delle funzioni continue su un intervallo.

Teorema di esistenza degli zeri:

data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$ esiste $c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = 0$.



<u>Dimo</u>: Pongo $a_0 = a$, $b_0 = b$; considero $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$;

$f(c_0) =$
- 0 fine
- concorda con $f(a_0)$: pongo $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$
- concorda con $f(b_0)$: pongo $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$

Trovato intervallo $[a_1, b_1]$ t.c.
- $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$
- $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

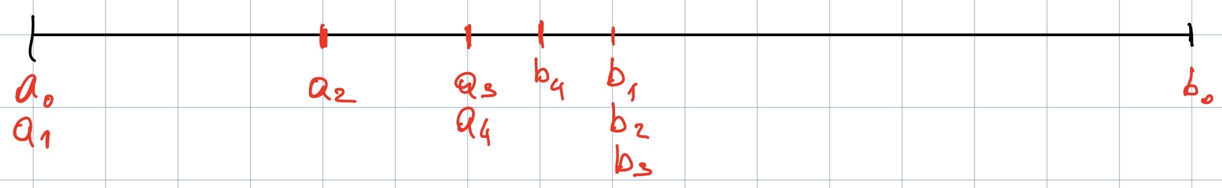
Prosegue uguale: $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

$f(c_1)$
- $\to 0$ fine
- $\to$ concorda con $f(a_1)$: pongo $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$
- $\to$ concorda con $f(b_1)$: pongo $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$.

Ho $[a_2, b_2]$ t.c.
- $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = 2^{-2} \cdot (b_0 - a_0)$
- $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

Continuo uguale e trovo:
- o c_n t.c. $f(c_n) = 0$ finito
- o $[a_n, b_n]$ t.c.
  - * $b_n - a_n = 2^{-n} (b_0 - a_0)$
  - * $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ quindi ho sempre $f(a_n)$ concorde con $f(a_0)$, $f(b_n)$ concorde con $f(b_0)$

* (a_n) successione crescente
* (b_n) successione decrescente



Dunque: a_n crescente limitata $\Rightarrow$ ha limite α

b_n decrescente limitata $\Rightarrow$ ha limite β

$b_n - a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$: lo chiamo c

Facciamo $f(a_0) > 0$, $f(b_0) < 0$:

$$f(a_n) > 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0 \qquad ①$$

$$f(b_n) < 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0 \qquad ②$$

Poiché f è continua in c ho

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c)$$

$$\left.\begin{array}{l} ① \Rightarrow f(c) \geq 0 \\ ② \Rightarrow f(c) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(c) = 0.$$

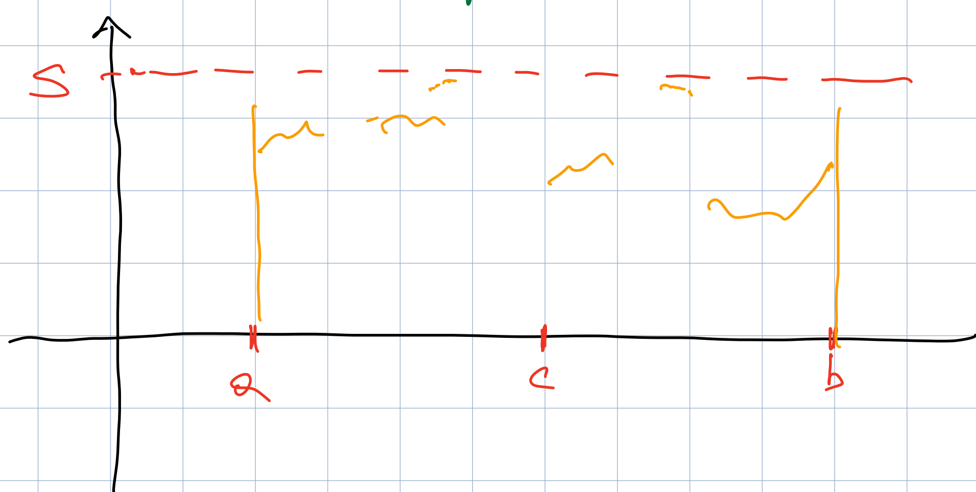
∎

Teorema di Weierstrass: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
$\Rightarrow f$ ha max e min.

Dimo: Prendo $S = \sup \{ f(x) : x \in [a,b] \}$.

Preso $c = \frac{a+b}{2}$ noto che

$$S = \max \left\{ \begin{array}{l} \sup \{ f(x) : x \in [a,c] \}, \\ \sup \{ f(x) : x \in [c,b] \} \end{array} \right\}.$$



Faccio come prima la bisezione:
trovo $[a_n, b_n]$ con

- a_n crescente
- b_n decrescente
- $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$
- $\sup \{ f(x) : x \in [a_n, b_n] \} = S$

$\lim(a_n) = \lim(b_n) = c$

Se $S = +\infty$ siccome $S = \sup\{f(x) : x \in [a_n, b_n]\}$,

$\forall n \ \exists x \in [a_n, b_n]$ con $f(x) > f(c) + 1$.

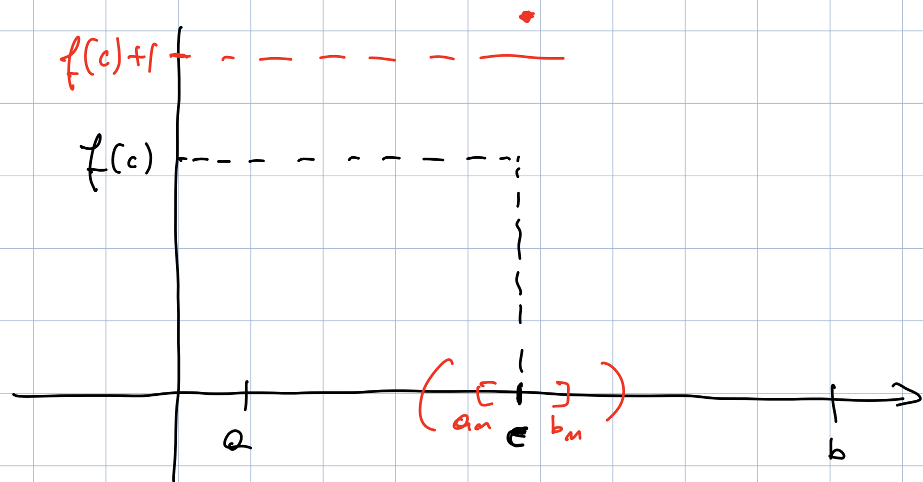
Però f è continua in c: $\exists \delta > 0$ t.c.

$|f(x) - f(c)| < 1$ per $|x - c| < \delta$.

Per n abbastanza grande ho $[a_n, b_n] \subset [c-\delta, c+\delta]$:

assurdo: per $x \in [a_n, b_n]$ avrei $|f(x) - f(c)| < 1$

ma $\exists x$ t.c. $f(x) > f(c) + 1$.



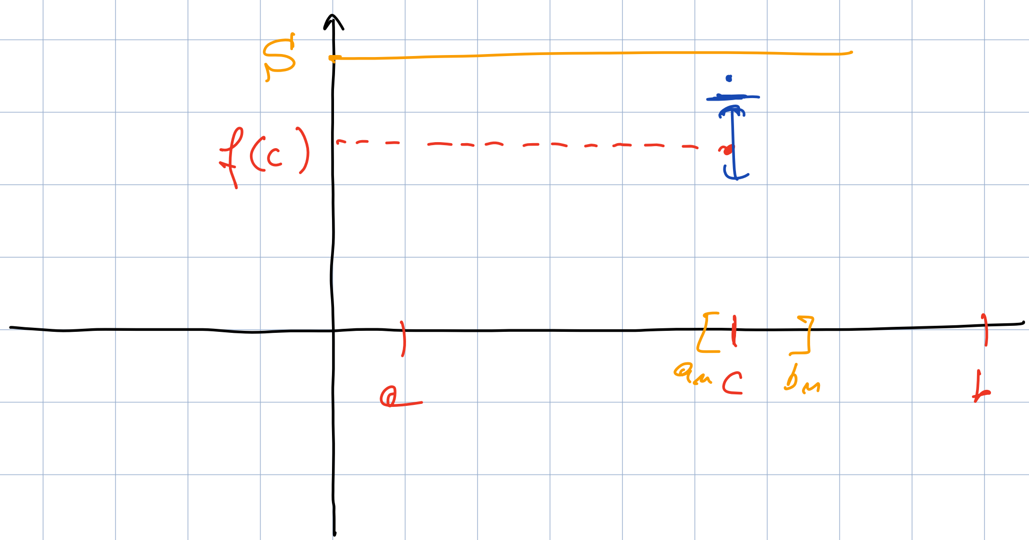
Ora ho $S < +\infty$; dimostro che $S = f(c)$.

Certamente $f(c) \leq S$; se valesse $f(c) < S$

stesso argomento di prima:

- siccome $S = \sup$ su tutti gli intervalli che si chiudono su c, avrei che arbitrariamente vicino a c esistono valori maggiori di $\frac{f(c)+S}{2}$
- invece siccome $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, vicino a

o tutti i valori hanno differenza da c minore di $(S - f(c))/2$.



Concludo che $S = f(c)$ cioè $S = \max(f)$. $\blacksquare$

<u>Oss</u>: tutte le ipotesi sono essenziali

- intervallo chiuso
- intervallo limitato
- f continua

Facile trovare su qualsiasi $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $[b, +\infty)$

f continua senza max o min.

Su $(0, 1]$ $\quad f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ non ha né sup né inf

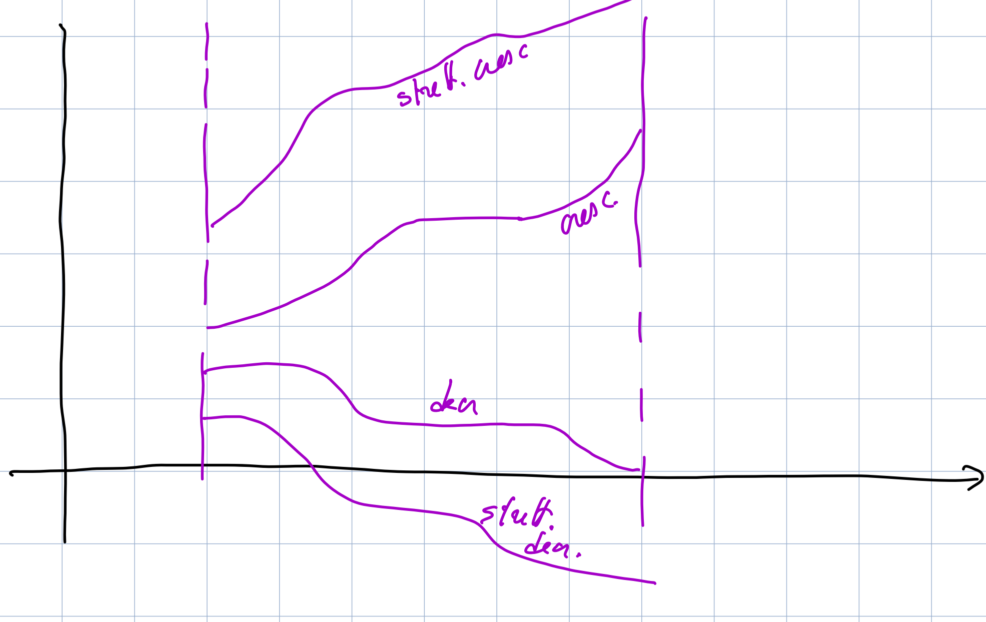
Su $[-1,1]$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f è discontinua in 0
non ha né sup né inf.

Def: chiamo $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo

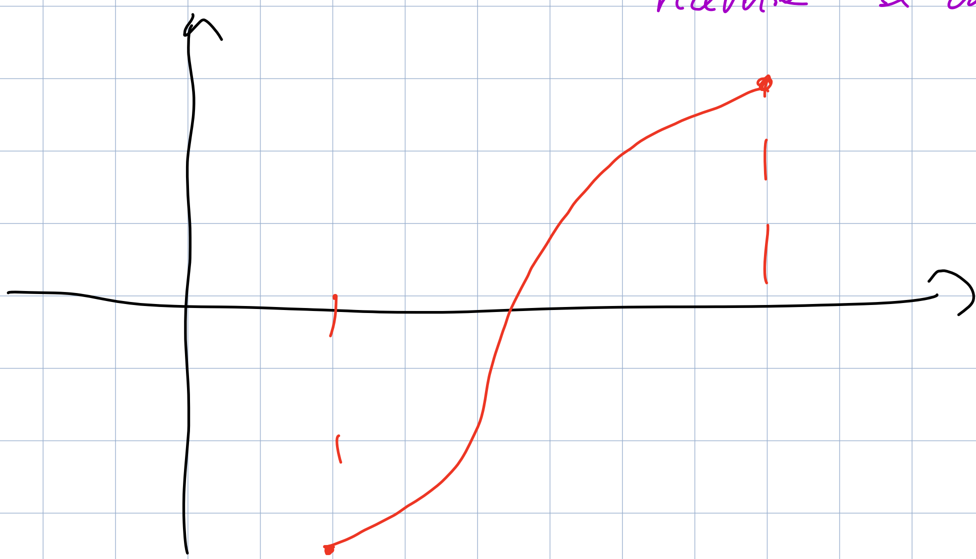
crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
} monotona

strett. crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
strett. decr. se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
} strettamente monotona



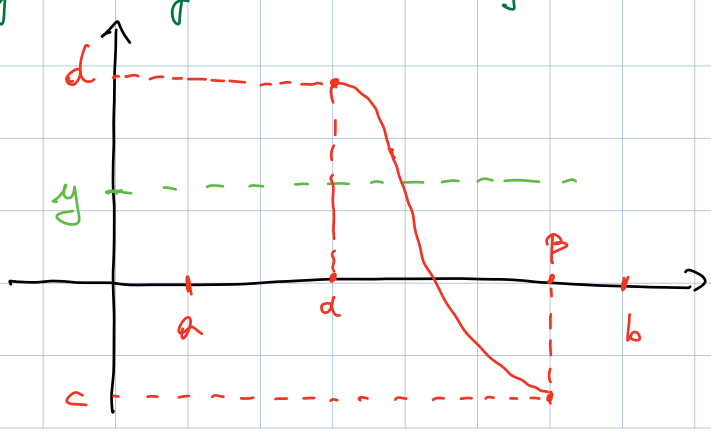
Oss: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $f(a) \cdot f(b) < 0$
strett. monotona $\Rightarrow$ ha unico zero.

Infatti se $f(c) = 0$ su $[a,c)$ è positiva } se decr.
$(c,b]$ è negativa }
viceversa se crescente



Conseguenza: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora $Im(f)$ è un intervallo $[c,d]$.

Pongo $c = \min(f)$, $d = \max(f)$.
Dunque $Im(f) \subset [c,d]$. Devo vedere che ogni y con $c < y < d$ è un valore assunto:

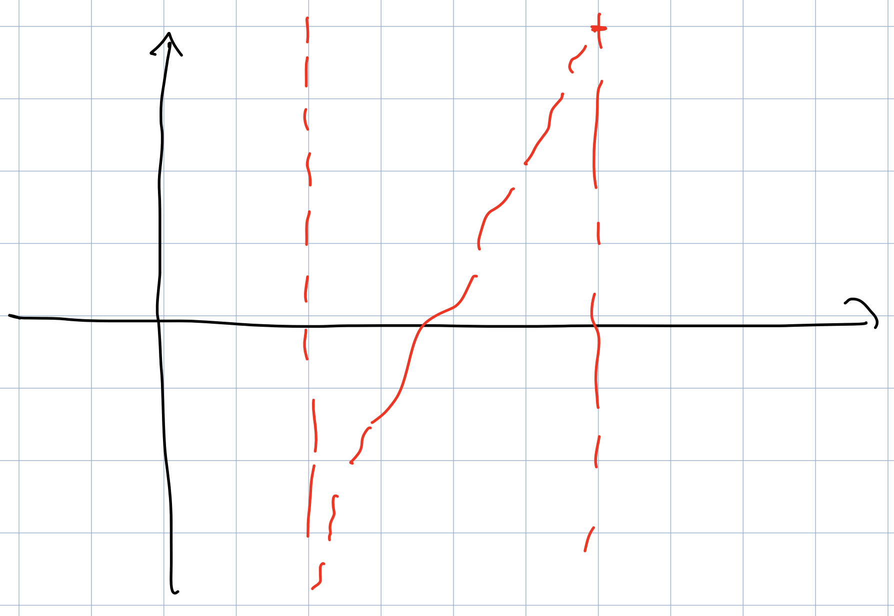


se $c = f(\beta)$, $d = f(\alpha)$ considero la funzione $g(x) = f(x) - y$ su $[\alpha, \beta]$ o $[\beta, \alpha]$.

(se $\alpha = \beta$ ho max = min e f è costante).

g è continua e ha valori discordi agli estremi
$\Rightarrow$ si annulla (Teo esistenza zeri)
$\Rightarrow$ f assume valore y.

<u>Esercizio</u>: se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ monotona
$\Rightarrow$ esistono $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to b^-} f(x)$.



Teorema: sia $f : [a,b] \to [c,d]$ funzione continua con $[c,d] = \mathrm{Im}(f)$; allora

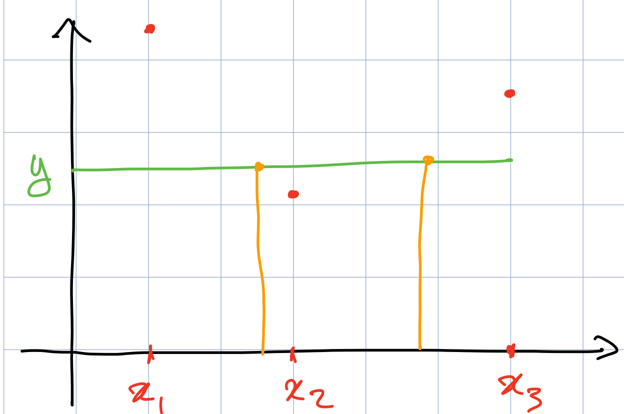
f invertibile $\iff$ strettamente monotona.

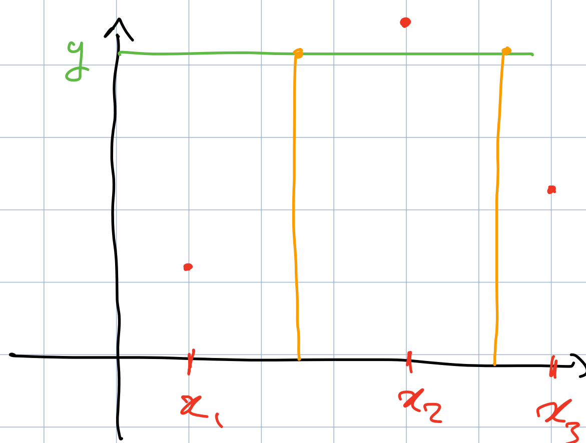
Dimo: $\underline{\Leftarrow}$ str. monotona $\Rightarrow$ iniettiva. ✓

$\underline{\Rightarrow}$ Non strettamente monotona significa:

$\exists\, x_1 < x_2 < x_3$ t.c.

$f(x_1), f(x_3) > f(x_2)$ o $f(x_1), f(x_3) < f(x_2)$





Un y di poco sopra/sotto $f(x_2)$ è assunto sia su $[x_1, x_2)$ sia su $[x_2, x_3]$ $\Rightarrow$ f non iniettiva. ▨