Ist. Mat. I - CIA
21/3/22

Pagina web "Carlo Petronio" + didattica ...

Fogli esercizi + altro : Teams + www

Esercizi : PROVATE A FARLI

Codocente : Lorenzo Venturello

Ricevimenti : Teams io : ???? su appuntamento via email
Venturello : ?
dottorando : ?

NO compitini ma : prova parziale (2 volte) gen/feb su I semestre

Domani : io 9:30 2 ore

— o —

Logica e insiemi numerici

Insieme: collezione di oggetti

Oggetto dell'insieme: elemento ; appartiene all'insieme

x X $x \in X$

Esempi:

- X = le lettere dell'alfabeto latino
  $= \{a, b, c, d, \dots, x, y, z\}$

  descrizione dell'insieme per elencazione

- X = noi oggi in aula G21 DCCI
  $= \{$ Carlo, Isabella, ... $\}$

- $\mathbb{N}$ = i numeri naturali
  $= \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 517, 518, \dots\}$

Attenzione:

- non conta l'ordine
  $\{$gatto, 7, Luca$\} = \{7$, Luca, gatto$\}$

- non ci sono ripetizioni
  $\{7, 9, 11, 9, 4\} = \{4, 7, 9, 11\}$

Inclusione : $Y \subseteq X$ se Y è contenuto in X cioè $\forall y \in Y$ si ha $y \in X$ (dico anche : Y sottoinsieme di X)

"per ogni"

Esempi : $\{1,3,7\} \subseteq \{1,2,3,5,7,19\}$

$$\boxed{\{1,2,7\} \not\subseteq \{1,3,7,41\}}$$

$\not P$ = "non P"

$$\{1,5,11\} \subseteq \{1,5,11\}$$

Per specificare $Y \subseteq X$ ma $Y \neq X$ si scrive $Y \subsetneq X$ (sottoinsieme proprio).

Notazione : $\{1,8,21\} \ni 8$

$\{1,8,21\} \supseteq \{1,21\}$

Sottoinsiemi definiti tramite proprietà:

$X = \{x \in$ voi qui in G21-DCCI : x è alto almeno 180 cm$\}$
$= \{$ Carlo, ~~Isabella~~, ... $\}$

$$X = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ dispari}\} = \{1,3,5,7,9, \dots\}$$

$X = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ pari}, n \leq 21 \}$
$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

———— o ————

$Y \subseteq X \qquad \forall y \in Y$ si ha $y \in X$

$Y \not\subseteq X \qquad \exists y \in Y$ t.c. $y \notin X$

esiste

tale che
" : "

$\{ n \in \mathbb{N} : n \text{ dispari} \}$

Insieme vuoto : $\emptyset$ l'insieme che non ha elementi

Oss: $\emptyset \subseteq X \qquad \forall X$

$\{ n \in \mathbb{N} : n^2 = 7 \} = \emptyset$

Dato X chiamo $\mathcal{P}(X)$ "insieme delle parti di X"
l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X :
$\mathcal{P}(X) = \{ Y : Y \subseteq X \}.$

Esempio: $\mathcal{P}(\underbrace{\{a, b\}}_{2}) = \underbrace{\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}}_{4}$

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

3 8

Esercizio: se X ha n elementi, $\mathcal{P}(X)$ ne ha 2^n

Numeri interi (interi "relativi")

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Numeri razionali (frazioni)

$$\mathbb{Q} \text{ "} = \text{" } \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, \ m \neq 0 \right\}$$

$$\frac{21}{-14} = \frac{-15}{10}$$

con la convenzione che

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \quad \text{se} \quad n \cdot q = m \cdot p$$

Sto usando l'operazione di prodotto sugli interi.

Fatto: su $\mathbb{Z}$ ci sono due operazioni binarie somma $+$, prodotto $\cdot, \times$

Es: $7 + 18 = 25$ $\quad 9 \cdot 7 = 63$

$7 + (-41) = -34$ $\quad (-4) \cdot (-21) = 84$

Sommatoria: somma di alcuni oggetti (numeri o altro) che dipendono da un indice intero che varia in modo specificato

Esempi:
$$\sum_{n=3}^{7}(2n+1) = 7+9+11+13+15$$

somma per n da 3 a 7

Si possono considerare sommatorie infinite (non sempre il risultato ha senso come numero)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1) = 1+3+5+7+\dots$$

non è un numero naturale

Proposizione: $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

$\alpha = 2/3$ $\quad n = 3$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{1-\frac{16}{81}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{27+18+12+8}{27} = \frac{\frac{81-16}{81}}{\frac{3-2}{3}}$$

$\frac{65}{27} = \frac{65}{27}$ OK

Dimostrazione (in generale) : [uso proprietà delle operazioni su $\mathbb{Q}$]

Devo verificare $\underbrace{(1-\alpha)\cdot\sum_{k=0}^{n}\alpha^k}_{} = 1-\alpha^{n+1}$

$$1\cdot\sum_{k=0}^{n}\alpha^k - \alpha\cdot\sum_{k=0}^{n}\alpha^k$$

$$= 1 + \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha^2} + \alpha^3 + \dots + \cancel{\alpha^n}$$
$$\quad - \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha^2} - \alpha^3 - \dots - \cancel{\alpha^n} - \alpha^{n+1}$$
$$= 1-\alpha^{n+1}.$$

Divisione euclidea in $\mathbb{N}$:

dati $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ esistono unici $q, r \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n = m\cdot q + r \qquad 0 \le r < m$$

divisione $n : m$

dividendo (n), divisore (m), quoziente (q), resto (r)

Esempi: $29 : 8$ $\qquad q = 3 \qquad r = 5$

$29 = 8 \cdot 3 + 5$

$\underbrace{29 = 8 \cdot 2 + 13}$

vera ma non è la divisione giusta perché non è vero che $13<8$.

Numeri reali $\mathbb{R}$

due costruzioni come estensione di $\mathbb{Q}$

I Notazione posizionale per i numeri (in base 10)

$$7432 = 7 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$
$$= 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

$$742,51 = 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}$$

$$15,2\overline{3} = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + \underbrace{3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} \ldots}$$

$$\underbrace{3 \cdot 10^{-2}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^0 + \left(\frac{1}{10}\right)^1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots\right)}$$

$$3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{1-1/10}$$

$=$ un numero razionale

$\alpha \neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{m} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha}$

$-1<\alpha<1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$

$724,17\overline{251} = \ldots =$ un numero razionale

ogni decimale periodico è numero razionale

Attenzione : $0,\overline{9} = 0,999\ldots$

$= 9\cdot 10^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\cdot 10^{-1} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 9\cdot 10^{-1}\cdot\frac{10}{9} = 1$

$343,26\overline{9} = 343,27$

Le scritture decimali periodiche non possono avere periodo 9

Viceversa : ogni numero razionale ha una scrittura decimale periodica.

(Esercizio : lo faccio domani)

$\mathbb{R}$ = tutti i decimali finiti e infiniti anche non periodici.

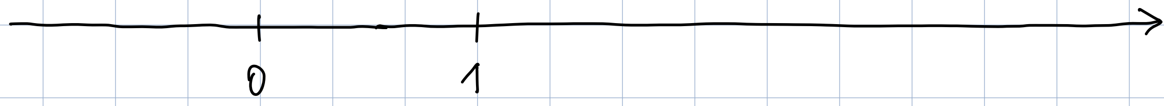
Es : $0,1010010001000001\ldots \notin \mathbb{Q}$

$\cap$

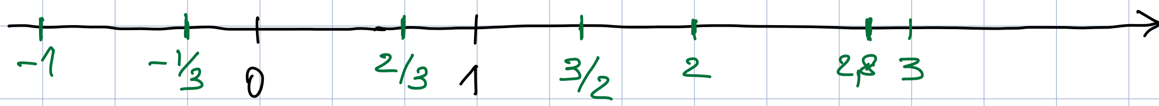
$\mathbb{R}$

Oss : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

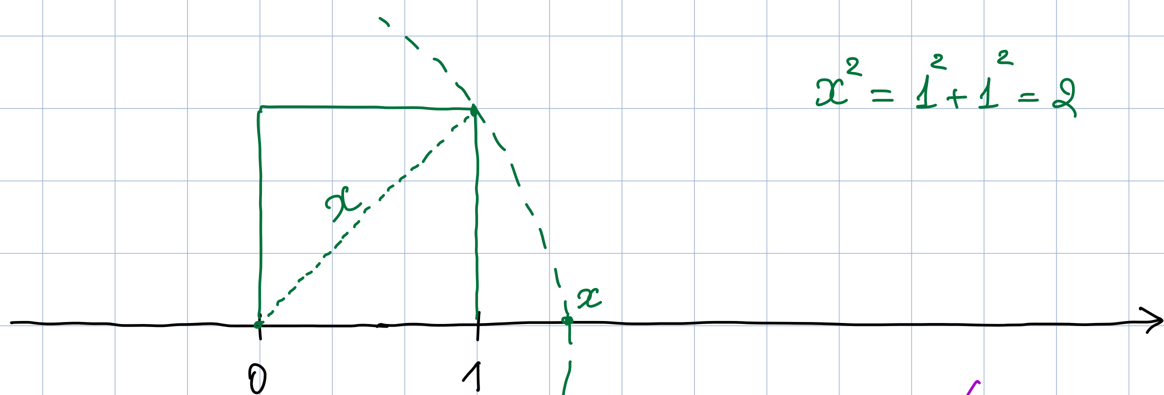
II Prendo una retta con un verso privilegiato e su essa due punti $0, 1$ con 1 nel verso privilegiato rispetto a 0.



Fatto: a ogni numero razionale corrisponde un punto della retta rispettando 0,1 e le lunghezze:



$\mathbb{R}$ = tutti i punti della retta.



$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Fatto: $\nexists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$.

("$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$")