UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 7/6/22 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 4-t^2 \\ t+2 & t^2+t-3 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

2. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & -1 \end{pmatrix}$
e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ i punti $[2t-4 : -t : t-2]$ e $[-1-t : t+3 : t-5]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ coincidono.

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $-4xy - 2xz + 4x - 2yz - z^2 = 0$.

5. Calcolare $\int\limits_\alpha (10x - 5y - 1)$ dove $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 - t \end{pmatrix}$.

6. Calcolare $\int\limits_\alpha \left(y - \frac{1-\cos(x)}{1+\sin(x)} \right) \mathrm{d}x$ dove $\alpha : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

7. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la 1-forma $\sin(4x^3 - 5y^2) \cdot (6x^2 \, \mathrm{d}x + ky \, \mathrm{d}y)$ risulta esatta.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Modulo di "Geometria" — Scritto del 7/6/22 — Esercizî

1. Considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di M.

(B) (2 punti) Provare che l'applicazione bilineare $\langle\,.\,|\,.\,\rangle_M$ associata a M è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(C) (3 punti) Esibire una base come nel punto (A) nonché gli autovalori associati agli autovettori.

(D) (3 punti) Esibire una base del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto al prodotto scalare del punto (B) al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(E) (3 punti) Esibire una base del sottospazio W del punto (D) che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare del punto (B).

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} t+5 & t-6 & t-2 \\ -t^2+t+6 & t^2+t-7 & t-2 \\ t^2-1 & 1-t^2 & t+1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\det(M) = 2t^4 + t^3 - 3t^2 - t + 1$.

(B) (3 punti) Sapendo che M ha sempre l'autovalore $t^2 - 1$, determinare gli altri.

(C) (3 punti) Per ogni t determinare la molteplicità algebrica degli autovalori di M.

(D) (3 punti) Per ogni t determinare la molteplicità geometrica degli autovalori di M, stabilendo se M sia o meno diagonalizzabile.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 7/6/22 — Quesiti

Risposte ai quesiti

3. $\diamondsuit$

1. $t \neq 3$

2. $\lambda_1 = 4,\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -2,\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix}$

3. $t = 3$

4. Paraboloide iperbolico

5. $\frac{1}{12}\left(13\sqrt{13} - 1\right)$

6. $-\frac{\pi}{2}$

7. $k = -5$

1. $\heartsuit$ 2. $\spadesuit$ 3. $\diamondsuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\spadesuit$ 6. $\diamondsuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\diamondsuit$ 10. $\clubsuit$

Soluzioni degli esercizî

3. $\diamondsuit$

1.

(A) M è simmetrica

(B) $d_1 = 3 > 0,\ d_2 = 11 > 0,\ d_3 = 30 > 0$

(C) $\lambda_1 = 2,\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 3,\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = 5,\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.

(A) Sostituendo la prima colonna con sé stessa più la seconda e poi la prima riga con sé stessa meno la seconda, quindi sviluppando lungo la prima colonna si trova direttamente $-(2t-1)(1-t^2)(t+1) = 2t^4 + t^3 - 3t^2 - t + 1$

(B) $2t - 1$ e $t + 1$

(C) Per $t = 2$ autovalore 3 con molteplicità algebrica 3; per $t = -1$ autovalore -3 con molteplicità algebrica 1 e autovalore 0 con molteplicità algebrica 2; per $t = 0$ autovalore 1 con molteplicità algebrica 1 e autovalore -1 con molteplicità algebrica 2; altrimenti autovalori $t^2 - 1,\ 2t - 1,\ t + 1$ con molteplicità algebrica 1

(D) Per $t = 2$ autovalore 3 con molteplicità geometrica 2: non diagonalizzabile; per $t = -1$ autovalore -3 con molteplicità geometrica 1 e autovalore 0 con molteplicità geometrica 2: diagonalizzabile;

per $t = 0$ autovalore 1 con molteplicità geometrica 1 e autovalore -1 con geometricaà algebrica 1: non diagonalizzabile; altrimenti autovalori $t^2 - 1,\ 2t - 1,\ t + 1$ con molteplicità geometrica 1: diagonalizzabile

---

1. $\heartsuit$ 2. $\spadesuit$ 3. $\diamondsuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\spadesuit$ 6. $\diamondsuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\diamondsuit$ 10. $\clubsuit$
