Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/2/22 — Quesiti

Quesito 1. Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ di dimensione 3 e un'applicazione lineare $f : V \to V$ avente traccia 0 e determinante 12, calcolare gli autovalori di f sapendo che $p_f(2) = -30$. Convenzione usata: $p_f(t) = \det(t \cdot \mathrm{id}_V - f)$.

Quesito 2. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1-t^2 \\ t+1 & t^2+t-2 \end{pmatrix}$$

risulta diagonalizzabile.

Quesito 3. In $\mathbb{R}^3$ dotato della distanza indotta dal prodotto scalare standard, determinare il punto delle retta passante per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ più vicino al punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quesito 4. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

determinare un generatore della retta ortogonale ai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quesito 5. Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} z & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quesito 6. Determinare i punti all'infinito del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$6x^3 - x^2y - 5xy^2 + 2y^3 + 7x^2 - 5xy + 6y^2 - 3x + 8y - 1 = 0.$$

Quesito 7. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della conica di equazione

$$tx^2 + 2(t+2)xy + 9y^2 + 2x + 2y = 0.$$

Quesito 8. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4xy + 2xz - 2x - 2z + 5 = 0.$$

Quesito 9. Provare che il luogo in $\mathbb{R}^2$ definito dall'equazione

$$\sin(2x - 3y) + \mathrm{e}^{-5x+2y} = 1$$

è una curva nell'intorno dell'origine e determinare la direzione della retta ad esso tangente in tale punto.

Quesito 10. Calcolare

$$\int_{\alpha} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$$

dove $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ è la curva data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Risposte ai quesiti

1. $-3, \ -1, \ 4$

2. $t \neq 2$

3. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. $z = t(1+i)$ con $t \in \mathbb{R}$

6. $[2:3], \ [1:2], \ [1:-1]$

7. Degenere (due rette incidenti) per $t = 5$; parabola per $t = 1$ e $t = 4$; ellisse per $1 < t < 4$; iperbole altrimenti

8. Insieme vuoto

9. Posto $f(x,y) = \sin(2x-3y) + \mathrm{e}^{-5x+2y} - 1$ si ha $f(0,0) = 0$ e $Jf(0,0) = (-3,-1) \neq (0,0)$, dunque si applica il teorema del Dini; direzione $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

10. $\pi^2 - 8$