Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 20/7/21 — Quesiti

Quesito 1. Posto $V = \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x]$ considerare l'applicazione lineare $f : V \to V$ data da

$$f(u(x)) = u(3x) + 2x \cdot u(2) + 2 \cdot u(-1).$$

Determinare il polinomio caratteristico di f e stabilire se f sia diagonalizzabile.

Quesito 2. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0\}$ considerare un'applicazione lineare $f : X \to X$. Sapendo che il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f si annulla per $t = -1$, per $t = 4$ e per $t = 7$, si può concludere che f è diagonalizzabile oppure che non lo è? Giustificare la risposta.

Quesito 3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare su $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & t+5 \\ t^2-7 & 1-t \end{pmatrix}$$

è un prodotto scalare.

Quesito 4. Trovare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} i & 2+i \\ -2+i & -3i \end{pmatrix}$$

e una base ortogonale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

Quesito 5. Trovare una matrice $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con soli quattro coefficienti non nulli tale che esista $X \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ ortogonale con

$$X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = B.$$

Quesito 6. Determinare i punti all'infinito del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$6x^3 - 19x^2y + 11xy^2 + 6y^3 + 7x^2 - 5xy + 17y^2 + 8x + y - 33 = 0.$$

Quesito 7. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione

$$-3x^2 + 4xy - 4xz - 2x + 4y^2 - 6y - z^2 + 2z + 8 = 0.$$

Giustificare la risposta.

Quesito 8. Per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x, y) = \sin(5x + 4y) \cdot \mathrm{e}^{3x-2y}$$

calcolare la matrice hessiana nel punto $(0, 0)$ e i segni dei suoi autovalori.

Quesito 9. Stabilire quale sia il più grande intervallo I sul quale può essere definita la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} + \ln(1-t) \\ \ln(t) \end{pmatrix}.$$

Calcolare la curvatura di α nel punto $t = \frac{1}{3}$ e il segno di tale curvatura per ogni t.

Quesito 10. Calcolare

$$\int_\alpha \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

per $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t(1-t) \\ \cos(\pi \cdot t) \end{pmatrix}$.

Risposte ai quesiti

1. $p_f(t) = (t-5)^2$. No

2. Sì, X ha dimensione 3 e f ha 3 autovalori distinti

3. $t = -3$

4. $\lambda_1 = -4i,\ v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2-i \end{pmatrix};\ \lambda_2 = 2i,\ v_2 = \begin{pmatrix} 2+i \\ i \end{pmatrix}$

5. $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

6. $[2:1],\ [-1:3],\ [3:2]$

7. Paraboloide iperbolico

8. $\begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 2 & -16 \end{pmatrix}$; discordi

9. $I = (0,1)$; $-\frac{18}{53\cdot\sqrt{53}}$; concorde con $t - \frac{1}{2}$

10. $-\pi$