Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 21/7/20 — Quesiti

Quesito 1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ sia diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 9-k^2 & k-2 & 0 \\ 0 & k+3 & 0 \\ k^2-1 & k+1 & k^2+1 \end{pmatrix}$.

Quesito 2. Trovare il punto del piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $3x + 5y - 4z = 0$ più vicino al punto $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quesito 3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitari, con somma delle coordinate reale e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \end{pmatrix}$.

Quesito 4. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 2i & 3+i \\ -3+i & -i \end{pmatrix}$ e una base ortogonale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

Quesito 5. Trovare per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ invertibile tale che

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & \sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quesito 6. Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione

$$(1-t)x^2 + 4xy + 3y^2 + 2(1+2t)x + 2y = t$$

sia degenere, e per gli altri valori determinarne il tipo affine.

Quesito 7. Considerare in $\mathbb{R}^3$ una quadrica $\mathcal{Q}$ non degenere e un punto P di $\mathcal{Q}$. A seconda del tipo affine di $\mathcal{Q}$ dire quante sono le rette di $\mathbb{R}^3$ contenute in $\mathcal{Q}$ che passano per P. La risposta dipende dalla posizione di P su $\mathcal{Q}$?

Quesito 8. Determinare i punti all'infinito del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$12x^3 - 5x^2y - 17xy^2 + 10y^3 + 7x^2 + 11xy - 3y^2 + 6x - \sqrt{2}y + \pi = 0.$$

Quesito 9. Provare che

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sin(2x - 3y) + \mathrm{e}^{5x+7y} = 1\}$$

è una curva vicino all'origine e trovare la retta tangente a $\mathcal{C}$ nell'origine.

Quesito 10. Calcolare

$$\int_\alpha \left(\left(\sin\left(e^{x^2} \right) + y \right) \, dx + \left(\cos\left(e^{y^2} \right) - x \right) \, dy \right)$$

con $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Risposte ai quesiti

1. $k \neq -3$ e $k \neq \pm 2$

2. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$

3. $\pm \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 4+3i \\ 1-3i \end{pmatrix}$

4. $\lambda_1 = 4i,\ \lambda_2 = -3i,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 2 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} -1+3i \\ 5 \end{pmatrix}$

5. $k = \pm 4$

6. Degenere per $t = -\frac{2}{9}$ e $t = 0$; ellisse per $t < -\frac{1}{3}$, parabola per $t = -\frac{1}{3}$, iperbole altrimenti

7. Due per il paraboloide iperbolico e l'iperboloide iperbolico, nessuna altrimenti; la risposta non dipende da P

8. $[1:1],\ [2:3],\ [5:-4]$

9. $f(x,y) = \sin(2x-3y) + \mathrm{e}^{5x+7y} - 1$ si annulla in $(0,0)$ e il suo gradiente non si annulla in $(0,0)$; equazione $7x + 4y = 0$

10. -2π