UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 8/1/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Trovare gli autovalori di $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -6$, $\det(A) = 42$ e $p_A(2) = -36$.

2. Data $A = \begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ trovare una matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ per la quale esista $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ unitaria tale che $X^{-1} \cdot A \cdot X = D$.

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $[2 : -1 : t]$ e $[3 : t-1 : -2]$ contiene il punto $[1 : -6 : 12]$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $-3x^2 - 8xy + 6xz + 3y^2 - 2yz - 4y + 2z = 0$. Spiegare.

5. Data la curva orientata $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t + \cos(2t) \\ t^2 - \ln(1+t) \end{pmatrix}$ per $t > -1$,
calcolarne la curvatura nel punto $\alpha(0)$.

6. Data la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t - t^2 \\ t + 2t^2 \end{pmatrix}$ per $t \in [0, 1]$ calcolare $\int_\alpha \left(2x + y - \frac{7}{10}\right)$.

7. Data la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ per $t \in [0, 2\pi]$ calcolare $\int_\alpha \left(\left(2y - e^{x^2}\right) \mathrm{d}x + (x + \ln(1 + y^4))\ \mathrm{d}y\right)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A_z = \begin{pmatrix} z^2 - z - i & iz - 1 \\ -iz^2 + 2iz - 2 - i & 2z - 1 + 2i \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Verificare che $\det(A_z) = z^3 - z^2 + iz^2$.

(B) (1 punto) Esibire il polinomio caratteristico di A_z

(C) (3 punti) Determinare al variare di z gli autovalori di A_z.

(D) (3 punti) Stabilire per quali z tali autovalori coincidono.

(E) (3 punti) Stabilire per quali z si ha che A_z è diagonalizzabile.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 3 - t & 2t - 3 \\ t^2 - 4t + 2 & t^2 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Stabilire per quali valori di t esiste una matrice ortogonale X tale che $X^{-1} \cdot M_t \cdot X$ sia diagonale.

(B) (3 punti) Per tali valori di t determinare i segni degli autovalori di M_t.

(C) (2 punti) Verificare che esiste un solo valore t_0 di t per il quale la forma bilineare associata alla matrice M_t è un prodotto scalare.

(D) (4 punti) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ unitari e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a tale prodotto scalare.

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $-7,\ -2,\ 3$

2. $D = \begin{pmatrix} 4i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

3. $t = 2$ e $t = 5$

4. $d_2 < 0,\ d_3 = 0,\ d_4 \neq 0$: paraboloide iperbolico

5. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$

6. $\frac{7}{6}\left(\frac{13}{5}\sqrt{26} - \sqrt{10}\right)$

7. $-\pi$

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) Calcolo diretto

(B) $t^2 - (z^2 + z - 1 + i)t + (z^3 - z^2 + iz^2)$

(C) z^2 e $z - 1 + i$

(D) $z = -i$ e $z = 1 + i$

(E) $z \neq 1 + i$

2.

(A) $t = 1$ e $t = 5$

(B) Positivi per $t = 1$, discordi per $t = 5$

(C) $t_0 = 1$

(D) $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$