Quesito 1. Provare con un argomento diretto che dati $a, b \in \mathbb{Z}$ si ha che $10a + b$ è divisibile per 7 se e solo se lo è $a - 2b$.

Quesito 2. Considerare

$$V = \{A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) : \ {}^{\mathrm{t}}A = A, \ \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

Dati 5 vettori di V linearmente indipendenti, quanti bisogna aggiungerne per avere una base di V?

Quesito 3. Considerare

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0\} \quad v = \begin{pmatrix} 17 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Provare che v appartiene a V e che $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ è base di V, quindi trovare $[v]_{\mathcal{B}}$.

Quesito 4. Se X, Y, Z sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ di dimensioni rispettive $3, 4, 6$ e $X \cap Y$ ha dimensione 2, che dimensione può avere $(X+Y) \cap Z$?

Quesito 5. Considerare $U = \{z \in \mathbb{C}^8 : \ (1-i)z_3 = (2+3i)z_5\}$ e un'applicazione lineare iniettiva

$$f : \mathbb{C}_{\leqslant 3}[z] \to U.$$

Che dimensione può avere un sottospazio W di U tale che $W \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$?

Quesito 6. Considerare

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0\} \qquad M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Provare che la formula $f(x) = M \cdot x$ definisce un'applicazione lineare da V in V.
Scegliere una base $\mathcal{B}$ di V e determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Quesito 7. Considerare $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0\}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to V$ lineare tale che

$$f\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Provare che f è invertibile e calcolare $f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Quesito 8. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Quesito 9. Trovare equazioni cartesiane del sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di presentazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Quesito 10. Considerare in $\mathbb{C}^2$ i sottospazi

$$Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3+i \\ 3i \end{pmatrix} \qquad W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Calcolare la proiezione su Z del vettore $\begin{pmatrix} 1+5i \\ -7+2i \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{C}^2 = Z \oplus W$.

Risposte ai quesiti

1. Se $10a + b = 7c$ allora $b = 7c - 10a$ e $a - 2b = a - 14c + 20a = 21a - 14c = 7(3a - 2c)$.
Se $a - 2b = 7c$ allora $a = 2b + 7c$ e $10a + b = 20b + 70c + b = 21b + 70c = 7(3b + 10c)$

2. 4

3. v, v_1, v_2 soddisfano l'equazione di V; v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti e V ha dimensione 2; $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. Tra 2 e 5 compresi

5. Tra 0 e 3 compresi

6. Se $w = (3, 2, -7)$ si ha $w \cdot M = -5w$;
scegliendo ad esempio $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ si ha $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. f manda una base di $\mathbb{R}^2$ in una di V; $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

8. -1

9. $\begin{cases} 11x_1 + 8x_2 - x_3 = 9 \\ 7x_2 - 5x_3 + 11x_4 = -10 \end{cases}$

10. $\begin{pmatrix} 1 + 7i \\ -6 + 3i \end{pmatrix}$