UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 18/2/20 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se $X \subset \mathbb{R}^7$ ha dimensione 3, $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ è lineare e $\mathbb{R}^7 = X \oplus \mathrm{Im}(f)$ e sono dati 11 generatori di $\mathrm{Ker}(f)$, quanti bisogna scartane per ottenere una base?

2. Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[8e_1 + 13e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $[18e_1 - e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Se $X, Y, Z \subset \mathbb{C}^9$ sono sottospazi tutti di dimensione 5 e $X \cap Y$ ha dimensione 3, che dimensione può avere $(X + Y) \cap Z$?

4. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} (t+2)x + (2-2t)y = t \\ (6-3t)x + (2t+3)y = 3-2t. \end{cases}$

5. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. In una matrice $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ esiste una sottomatrice $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ avente determinante non nullo tale che *una sola* orlata C di B ha determinante non nullo. È possibile che A abbia rango 4? Spiegare.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(-9e_1 + 11e_2 + 4e_3)$ determinare la proiezione su X di $2e_1 - e_2 + 5e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Porre $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1-i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3i \\ 1+2i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$ e $w = \begin{pmatrix} 12+i \\ -4+3i \\ 1-2i \\ 11-2i \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che $\mathcal{B}$ è base di un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{C}^4$.

(B) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di $\mathcal{B}$.

(C) (4 punti) Provare che w appartiene a W e trovare $[w]_{\mathcal{B}}$.

(D) (3 punti) Se $f : W \to W$ è tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 2+i \\ 5i & -2 \end{pmatrix}$ calcolare $f(w)$.

2. Considerare le matrici $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_4 = 0$.

(A) (4 punti) Determinare una base del nucleo e una dell'immagine di M vista come applicazione lineare $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, verificando la formula della dimensione.

(B) (4 punti) Provare che la formula $f(u) = P \cdot M \cdot u$ definisce un'applicazione lineare invertibile $f : U \to U$.

(C) (4 punti) Provare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus \mathrm{Ker}(M)$ e determinare la matrice della proiezione su U associata a tale decomposizione.

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. 6

2. $\mathcal{B} = (3e_1 - 2e_2, 4e_1 + e_2)$

3. Tra 3 e 5 compresi

4. Infinite per $t = 6$, nessuna per $t = \frac{1}{4}$, una altrimenti

5. -17

6. No. Per assurdo: esiste una orlata $D \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ di C con determinante non nullo. La sottomatrice $E \in \mathcal{M}_{4\times 3}$ di D che contiene B ma non contiene C ha rango 3, dunque una orlata F di B in E ha determinante non nullo, e F non coincide con C

7. $29e_1 - 34e_2 - 7e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) I due vettori che costituiscono $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti

(B) Ad esempio $\begin{cases} 3z_1 + (5+3i)z_2 + (1-4i)z_3 = 0 \\ (4+i)z_2 - 2(1+3i)z_3 + 3z_4 = 0 \end{cases}$

(C) $\begin{pmatrix} 3-i \\ -1+2i \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 7-9i \\ -21+12i \\ 30i \\ -28+11i \end{pmatrix}$

2.

(A) Per il nucleo $\begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$, per l'immagine le prime tre colonne di M; $1+3=4$

(B) L'immagine di P è U, dunque f è ben definita e lineare; rispetto alla base (e_1, e_2, e_3) di U la matrice associata è $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ che è invertibile

(C) U ha dimensione 3, $\mathrm{Ker}(M)$ ha dimensione 1, e la loro intersezione è banale; $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$