UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 28/1/20 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

**1.** Se $f:\{z\in\mathbb{C}^8:\ (1-i)z_3+2iz_4-5z_7=0\}\to\mathbb{C}^4$ è lineare surgettiva e sono dati 9 generatori di $\mathrm{Ker}(f)$, quanti bisogna scartarne per avere una base?

**2.** Se $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ è lineare, sapendo che $f(2e_1-5e_2)=-3e_1+e_2$ e che $f(3e_1+7e_2)=2e_1-5e_2$, calcolare $f^{-1}(-8e_1+7e_2)$.

**3.** Posto $X=\{x\in\mathbb{R}^3:\ 2x_1-x_2+5x_3=0\}$, data $f:X\to X$ con $f(x)=\begin{pmatrix}3x_1+x_2-x_3\\7x_1-6x_2-7x_3\\x_1-2x_2+x_3\end{pmatrix}$ e scelta $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

**4.** Esibire oppure dimostrare che non esiste un'applicazione lineare invertibile
$f:\{z\in\mathbb{C}^3:\ (1+i)z_1+2iz_2-3z_3=0\}\to\mathbb{C}_{\leqslant 1}[w]$.

**5.** Se $A\in\mathcal{M}_{6\times 7}(\mathbb{C})$ e $B\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ è una sottomatrice di $A$, stabilire quale frazione delle $M\in\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ sottomatrici di $A$ sono orlate di $B$.

**6.** Risolvere $2iz^2-7z+5-5i=0$.

**7.** Posto $Z=\{x\in\mathbb{R}^2:\ 3x_1-5x_2=0\}$ e $W=\{x\in\mathbb{R}^2:\ 4x_1+7x_2=0\}$, verificare che $\mathbb{R}^2=Z\oplus W$ ed esibire la matrice della proiezione su $Z$ associata a tale decomposizione.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 28/1/20 — Esercizî

**1.** Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 - 2t \\ (2-t)x + 4y - 2z = 3 \\ x - 2ty - 8z = -11. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Risolvere il sistema per $t = 1$.

(B) (4 punti) Trovare l'unico valore $t_1$ di $t$ per il quale il sistema ha infinite soluzioni, ed esibirle.

(C) (2 punti) Trovare l'unico valore $t_2$ di $t$ per il quale il sistema è impossibile.

(D) (3 punti) Detto $U$ lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato a quello dato per $t = t_2$, e definito $V$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $7x - 8y + 5z = 0$, provare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ ed esibire la proiezione su $V$ del vettore $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ rispetto a tale decomposizione.

**2.** In $\mathbb{R}^5$ considerare il sottospazio vettoriale $X$ di equazioni $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

(A) (1 punto) Calcolare la dimensione di $X$.

(B) (4 punti) Derminare tutti i vettori di $X$ aventi nulle le due coordinate di posizione pari oppure due delle coordinate di posizione dispari, e le altre intere e prime tra loro e con somma positiva.

(C) (3 punti) Ordinare i vettori del punto precedente in modo che sia crescente la somma delle coordinate ed estrarne una base $\mathcal{B}$ di $X$.

(D) (4 punti) Determinare le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ del primo vettore scartato nel punto precedente.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Risposte ai quesiti

## 5. ♢

**1.** 6

**2.** $e_1 - 17e_2$

**3.** $\begin{pmatrix} -15 & 11 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}$

**4.** Esiste; ad esempio la $f$ tale che $f(3e_1 + (1+i)e_3) = 1$ e $f(3e_2 + 2ie_3) = w$

**5.** $\frac{2}{175}$

**6.** $z_1 = -1 - 3i,\ z_2 = 1 - \frac{i}{2}$

**7.** $Z$ e $W$ hanno dimensione 1 e si intersecano banalmente; $\frac{1}{41}\begin{pmatrix} 20 & 35 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Soluzioni degli esercizî

## 5. ♢

**1.**

(A) $x = -\frac{13}{12},\ y = \frac{35}{24},\ z = \frac{7}{8}$

(B) $t_1 = -3;\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -10 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$

(C) $t_2 = 5$

(D) $U$ è generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ che non appartiene a $V$, il quale ha dimensione 2; $\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}$

**2.**

(A) 3

(B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 17 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 31 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 38 \\ 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) L'ordine è il precedente; bisogna scartare l'ultimo vettore

(D) $\frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$