UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 29/1/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Determinare il polinomio caratteristico di una matrice 3×3 avente traccia 2, determinante 42 e l'autovalore -3.

2. Dire se la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ -7 & 8 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sia diagonalizzabile. Spiegare.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ con prima coordinata reale, ortogonali a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ e unitari.

4. Trovare a tale che $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 7 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ sia coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$ tramite una matrice ortogonale.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $x^2 + y^2 + 4z^2 + xy + 2xz + 2yz - 2x = 0$.

6. Determinare il punto all'infinito della retta in $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Dire per quali k e h sia esatta la forma $\cos(x-3y)(2\,\mathrm{d}x + k\,\mathrm{d}y) + (2x+y)\sin(x-3y)(h\,\mathrm{d}x + 3\,\mathrm{d}y)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 29/1/19 — Esercizî

1. Considerare il vettore $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} 8 & -10 & -10 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & -7 & -9 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Esibire la matrice N della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su $v^\perp$, verificando che soddisfa le proprietà caratterizzanti.

(B) (4 punti) Trovare gli autovalori di M con i relativi autospazi e molteplicità algebriche e geometriche, stabilendo se M sia diagonalizzabile o meno.

(C) (4 punti) Provare che $M + N$ ha l'autovalore -1.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(u) = \begin{pmatrix} 2u - u^2 + \sin(u) \\ u^2 - u^3 + \cos(u) \\ 4u + u^2 - 3u^3 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet per α nel punto $u = 0$.

(B) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $u = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare $\int_\beta (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. $t^3 - 2t^2 - 29t - 42$

2. No: l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e geometrica 1

3. $\pm\frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -5 \\ 1+7i \end{pmatrix}$

4. $a = \pm\sqrt{83}$

5. Ellissoide

6. $[3 : 3 : 4]$

7. $k = 1,\ h = -1$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) $N = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 13 & -4 \\ 6 & -4 & 13 \end{pmatrix}$; $N^2 = {}^{t}N = N$

(B) Autovalore 3 con molteplicità algebrica e geometrica 1 e autospazio generato da $2e_1 + e_3$; Autovalore -2 con molteplicità algebrica 2 e geometrica 1 e autospazio generato da $e_2 - e_3$; non diagonalizzabile

(C) $e_2 - e_3$ è ortogonale a v, dunque $N(e_2 - e_3) = e_2 - e_3$; poiché $M(e_2 - e_3) = -2(e_2 - e_3)$ si ha allora che $(N + M)(e_2 - e_3) = -(e_2 - e_3)$

2.

(A) $t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{5\sqrt{221}}\begin{pmatrix} -56 \\ 25 \\ 42 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{221}}\begin{pmatrix} -4 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix}$

(B) $\kappa = \frac{\sqrt{221}}{125}$, $\tau = \frac{2}{13}$

(C) $2\cos(1)(1 + \sin(1))$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$