UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS • 1343 •

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 8/1/19 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Per quali $t \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 1 & t^2-1 \\ -t-1 & t^2+t+1 \end{pmatrix}$?

2. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la forma bilineare su $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & t^2-t \\ t+3 & 4-t \end{pmatrix}$ è un prodotto scalare?

3. Determinare i punti all'infinito del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^3-7xy^2+6y^3-2xy+5y+8=0$.

4. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $(4-t)x^2+2(t-1)xy+(t+1)y^2-2x-4y-11=0$ è una parabola?

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $3y^2-3z^2+6xy-6xz+4y-2z+1=0$.

6. Data $f(x,y)=(x+2y)\,\mathrm{e}^{3x-y}$ calcolare la matrice hessiana di f nell'origine e i segni dei suoi autovalori.

7. Calcolare $\int_\gamma \left(x+\ln\left(\frac{1}{2+\cos(y)}\right)\right)\,\mathrm{d}y$ con $\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A(z) = \begin{pmatrix} 4 & z^2 \\ \overline{z} + 1 - 3i & |z|^2 + 2 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali z la $A(z)$ ha autovalori reali e una base ortonormale di autovettori.

(B) (4 punti) Provare che per tutti i valori di z trovati nel punto (A) si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_{A(z)}$ è un prodotto scalare hermitiano su $\mathbb{C}^2$.

(C) (4 punti) Per il valore di z di modulo maggiore tra quelli trovati nel punto (A), individuare tutti i generatori del sottospazio ortogonale rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_{A(z)}$ al vettore $(1-i)e_1 + (1+2i)e_2$ che sono unitari rispetto al prodotto scalare hermitiano standard su $\mathbb{C}^2$

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \mathrm{e}^{2t} \\ t^2 + \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Provare che α è regolare.

(B) (4 punti) Calcolare la curvatura di α nei punti $t = 0$ e il suo segno nei punti $t = \pm 1$.

(C) (4 punti) Provare che esiste $M > 0$ tale che la curvatura di α è negativa per ogni t tale che $t > M$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. $t \neq 2$

2. $t = -1$

3. $[1:1],\ [2:1],\ [3:-1]$

4. $t = -\frac{1}{2}$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; discordi

7. $\frac{\pi}{2}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli eserciziî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) $z = 2 + i$ e $z = -1 - i$

(B) In entrambi i casi si ha $d_1 = 4 > 0$, mentre d_2 vale rispettivamente $3 > 0$ e $12 > 0$

(C) $\frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{122}}\begin{pmatrix} 6-7i \\ 1+6i \end{pmatrix}$

2.

(A) La prima componente di $\alpha'(t)$ si annulla solo per $t = -\frac{1}{2}$, ma per tale valore non si annulla la seconda

(B) $\frac{7}{4}\sqrt{2}$; negativo in entrambi i casi

(C) $\lim_{t\to+\infty} (e^t \cdot (6t+5) - 2 \cdot e^{2t} \cdot (4t^2 + 2t - 1) = -\infty$