UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 25/6/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} -1+2i & 1+i \\ 2+2i & 2-i \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

2. Esibire una matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ avente il solo autovalore 7 con molteplicità algebrica 3 e geometrica 2.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitari e ortogonali a $4e_1 - 3e_2 + e_3$.

4. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & -5 \\ -7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ è coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Determinare al variare di $t \in \mathbb{R}$ il tipo affine della conica di equazione
$tx^2 + 8txy - 11y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

6. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^7(\mathbb{R})$ è dato un sottospazio proiettivo X di dimensione 4. Qual è la massima dimensione possibile per un altro sottospazio proiettivo Y tale che $X \cap Y = \emptyset$?

7. Calcolare $\int_\alpha \left(\left(\mathrm{e}^{x^2} - y\right)\,\mathrm{d}x + \left(x - \mathrm{e}^{-y^3}\right)\,\mathrm{d}y\right)$ con $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t-2 & t+1 & 0 & t+1 \\ 5-2t^2 & 2t^2+t-4 & 2-t & t+1 \\ 3 & 1 & t+1 & 1 \\ 2t^2-5 & -t^2-t+3 & t-2 & t^2-t-2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A_t) = 2t^6 - 2t^5 - 11t^4 + 7t^3 + 19t^2 - 5t - 10$.

(B) (3 punti) Sapendo che A_t ha sempre gli autovalori $t^2 - 1$ e $2t^2 - 5$ trovare gli altri.

(C) (3 punti) Al variare di t determinare la molteplicità algebrica degli autovalori di A_t.

(D) (4 punti) Per i valori di t **interi** e tali che A_t ha almeno un autovalore con molteplicità algebrica maggiore di 1, trovare la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori di A_t e dire se A_t sia diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \sin(2s) \\ \cos(s) \\ s^2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Dire se α sia semplice e/o chiusa.

(B) (1 punto) Provare che α è regolare.

(C) (5 punti) Determinare riferimento di Frénet, curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (4 punti) Calcolare $\int_\beta x \, \mathrm{d}y$, dove β è la restrizione di α a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i;\ v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\frac{\cos(\vartheta)}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sin(\vartheta)}{\sqrt{78}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. $\alpha = \pm\sqrt{83}$

5. Parabola per $t = -\frac{11}{16}$ e $t = 0$; degenere (due rette incidenti) per $t = 1$ e $t = -\frac{11}{4}$; ellisse per $-\frac{11}{6} < t < 0$; iperbole altrimenti

6. 2

7. 12π

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) Sostituire la seconda colonna con sé stessa meno la quarta; raccogliere $2t^2-5$ dalla seconda colonna e sostituire la quarta riga con sé stessa più la seconda; sviluppando si trova

$$(2t^2-5)(t^2-1)(t+1)(t-2)$$

e resta da moltiplicare

(B) $t-2$ e $t+1$

(C) Per $t=-2$ autovalore 3 doppio e -1 e -4 semplici;
per $t=-\frac{3}{2}$ autovalore $-\frac{1}{2}$ doppio e $-\frac{7}{2}$ e $\frac{5}{4}$ semplici;
per $t=-1$ autovalori -3 e 0 doppi;
per $t=\frac{3}{2}$ autovalore $-\frac{1}{2}$ doppio e $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{4}$ semplici;
per $t=2$ autovalore 3 triplo e 0 semplice
altrimenti autovalori $t-2$, t^2-1, $2t^2-5$ e $t+1$ semplici

(D) Per gli autovalori semplici la molteplicità geometrica è sempre 1; altrimenti:
per $t=-2$ l'autovalore 3 ha molteplicità geometrica 2: diagonalizzabile;
per $t=-1$ l'autovalore -3 ha molteplicità geometrica 2 e l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica 1: non diagonalizzabile;
per $t=2$ l'autovalore 3 ha molteplicità geometrica 2: non diagonalizzabile

2.

(A) È chiusa poiché $\alpha(-\pi) = \alpha(\pi)$. Non è semplice poiché $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(B) La terza componente di $\alpha'(s)$ si annulla solo per $s = 0$, ma in quel punto non si annulla la prima

(C) $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\kappa = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $\tau = 0$

(D) $-\frac{2}{3}$

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢
