Esercitazione 30-05-19

Ricevimento: Lunedì 03-06 ore 15 AULA 1 Dip. Matematica

13.4.1. Determinare il tipo affine della quadrica assegnata al variare del parametro k.

$$x^2+5y^2+(k^2+9)z^2+2xy-2kxz+2kyz-1=0$$

$$A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & 0 \\ 1 & 5 & k & 0 \\ -k & k & k^2+9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} & \end{array} \qquad Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -k \\ 1 & 5 & k \\ -k & k & k^2+9 \end{pmatrix}$$

Se $\det(A)=0$ la quadrica è degenere.

Se $\det(A)\neq 0$, a meno di moltiplicare A (e Q) per ± 1, i casi possibili sono i seguenti:

Segni autovalori Q	Segni autovalori A	Tipo affine $\mathcal{Q}$
$+++$	$++++$	$\emptyset$
	$+++-$	Ellissoide
$++-$	$++-+$	Iperboloide ellittico
	$++--$	Iperboloide iperbolico
$++0$	$+++-$	Paraboloide ellittico
$+-0$	$++--$	Paraboloide iperbolico

Gli autovalori di A sono gli autovalori di Q, con l'aggiunta dell'autovalore -1 (in questo caso).

- Autovalori di $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -k \\ 1 & 5 & k \\ -k & k & k^2+9 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = 4k^2 - 36$ $\quad \det(A) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 3$

Per $k = \pm 3$ la quadrica è degenere.

$d_1 = 1 \quad d_2 = 4$

Per $k \neq \pm 3$

$d_3 = \det(Q) = -4k^2 + 36$.

$\det(Q) = -4k^2 + 36 \neq 0$

Se $-3 \underset{\neq}{\leq} k \underset{\neq}{\leq} 3$ $\quad d_3 = \det(Q) \underset{\neq}{\geq} 0$ $\quad d_1 > 0 \quad \frac{d_2}{d_1} > 0 \quad \frac{d_3}{d_2} > 0$

$$\begin{array}{ccc} d_1 > 0 & \frac{d_2}{d_1} > 0 & \frac{d_3}{d_2} > 0 \\ \downarrow & \downarrow & \searrow \\ + & + & + \end{array}$$

$Q = \text{"}+++\text{"} \quad A = \text{"}+++-\text{"} \Rightarrow$ Ellissoide.

Se $k < -3$ o $k > 3$ $\quad \underset{\parallel}{\overset{d_3}{}} \det(Q) < 0$

$d_1 > 0 \quad \frac{d_2}{d_1} > 0 \quad \frac{d_3}{d_2} < 0 \rightarrow Q = \text{"}++-\text{"} \quad A = \text{"}++--\text{"}$

Iperboloide iperbolico

14.1.2. Stabilire se le curve parametrizzate α e β date definiscano la stessa curva orientata.

$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(t) = (t, 1-t^2)$

$\beta : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 \quad \beta(t) = (\sin(t), \cos^2(t))$ $\to \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

$\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$

Definiamo $\tau : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ come $\tau(t) = \sin(t)$

$\tau'(t) = \cos(t) > 0$ per $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Mostriamo che $\beta = \alpha \circ \tau$

$\beta(t) = (\sin(t), \cos^2(t))$

$\alpha(\tau(t)) = (\sin(t), 1 - \sin^2(t)) = (\sin(t), \cos^2(t))$

14.1.3. Confrontare tra loro le lunghezze delle seguenti curve:

$\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(t) = (2t^2, t^3) \quad \beta(t) = (3t^2, 2t^3)$

$L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| \cdot dt, \quad L(\beta) = \int_0^1 \|\beta'(t)\| \cdot dt$

$\alpha'(t) = (4t, 3t^2) = t(4, 3t) \qquad \beta'(t) = (6t, 6t^2) = t(6, 6t)$

$\|\alpha'(t)\| = t \cdot \|(4, 3t)\| \underset{\neq}{<} t\|(4, 4t)\| \underset{\neq}{<} t \cdot \|(6, 6t)\| = \|\beta'(t)\|$

$\|\alpha'(t)\| < \|\beta'(t)\| \Rightarrow L(\alpha) < L(\beta)$

14.1.5. Calcolare $\int_\alpha xy^2$ con $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

Posto $f(x,y) = xy^2$ $\int_\alpha f = \int_0^{\pi/2} f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| \cdot dt =$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos(t) \sin^2(t) \cdot dt =$$ - cambio di variabile $s = \sin(t)$)

$$= \int_0^1 s^2 \cdot ds = \frac{s^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

14.1.11. Considerare l'insieme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{3x-y} + \sin(x+2y) - 1 = 0\}$.

Provare che C contiene $(0,0)$ e che C è una curva vicino a $(0,0)$, e trovare la retta tangente a C in $(0,0)$.

1) C contiene $(0,0)$

2) C è curva in $(0,0)$: Calcoliamo il gradiente in $(0,0)$

di $f(x,y) = e^{3x-y} + \sin(x+2y) - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{3x-y} + \cos(x+2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{3x-y} + 2\cos(x+2y)$$

$$\operatorname{grad}(f)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \to \text{è un vettore non nullo.}$$

3) Equazione della retta tangente: $4x + y = 0$

14.2.4. Calcolare la curvatura con segno della curva α assegnata in $\alpha(t_0)$ con t_0 dato.

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 4t - t^5 \\ 4t^2 + t^4 \end{pmatrix} \qquad t_0 = 2 \qquad k(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 4 - 5t^4 \\ 8t + 4t^3 \end{pmatrix} \qquad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -20t^3 \\ 8 + 12t^2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'(2) = \begin{pmatrix} -76 \\ 48 \end{pmatrix} \qquad \alpha''(2) = \begin{pmatrix} -160 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$\det(\alpha'(2), \alpha''(2)) = \det \begin{pmatrix} -76 & -160 \\ 48 & 56 \end{pmatrix} = 3424$$

$\|\alpha'(2)\| = 4\sqrt{505}$ $\qquad K(2) = \dfrac{3424}{64(\sqrt{505})^3} > 0$

14.3.3. Per la curva α assegnata, trovare il riferimento di Frénet, curvatura e torsione nel punto $\alpha(s_0)$ con s_0 dato.

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} 1+2s+s^2-s^3 \\ e^{2s} \\ \sin(s) \end{pmatrix} \qquad s_0 = 0$$

$$K(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}$$

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \mid \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2}$$

$$\alpha'(s) = \begin{pmatrix} 2+2s-3s^2 \\ 2e^{2s} \\ \cos(s) \end{pmatrix} \qquad \alpha''(s) = \begin{pmatrix} 2-6s \\ 4 \cdot e^{2s} \\ -\sin(s) \end{pmatrix} \qquad \alpha'''(s) = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \cdot e^{2s} \\ -\cos(s) \end{pmatrix}$$

$$\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha''(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha'''(0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)\| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|\alpha'(0)\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \qquad K(0) = \frac{6}{3^3} = \frac{6}{27}$$

$$\langle \alpha'(0) \wedge \alpha''(0) \mid \alpha'''(0) \rangle = (-4 \;\; 2 \;\; 4) \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 24 + 16 - 4 = 36$$

$$\tau(0) = \frac{36}{36} = 1$$

Rif. Frénet.:

$$t = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \qquad n = b \wedge t = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

15.1.1. Calcolare l'integrale della forma ω assegnata sulla curva α indicata.

$$\int_\alpha 3y \cdot dx + x^2 \cdot dy \qquad \alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} 1-2t^2 \\ 3t+t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 \left(3(3t+t^2)(-4t) + (1-2t^2)^2 \cdot (3+2t) \right) \cdot dt =$$

$$\int_0^1 \left(8t^5 + 12t^4 - 20t^3 - 48t^2 + 2t + 3 \right) \cdot dt =$$

$$= \left(\frac{4}{3} t^6 + \frac{12}{5} t^5 - 5t^4 - 16t^3 + t^2 + 3t \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{12}{5} - 5 - 16 + 1 + 3 = -\frac{199}{15}$$

15.3.10. Verificare che la 1-forma ω assegnata è esatta e che è definita su un sottoinsieme Ω semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$. Quindi trovare un potenziale U di ω.

$\omega(x,y) = y\cdot\sin(x)\cdot dx + (\cos(y)-\cos(x))\cdot dy = h\cdot dx + g\cdot dy$

ω è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, che è sempl. connesso.

Verifichiamo che ω è chiusa. In particolare sarà esatta.

$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} = \sin(x) - \sin(x) = 0 \Rightarrow \omega$ chiusa.

Definiamo U t.c. $dU = \omega$.

Poniamo $U(0,0) = 0$

Definiamo $U(x,y) = \int_\alpha \omega$ a curva tra $(0,0)$ e (x,y), per esempio

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$$

$$U(x,y) = \int_\alpha \omega = \int_0^1 \Big(yt \cdot \sin(tx) \cdot x + \big(\cos(ty) - \cos(tx)\big) \cdot y \Big) \cdot dt$$

In questo integrale x e y sono costanti

$$= \big(\sin(yt) - yt \cdot \cos(xt)\big)\Big|_0^1 =$$

$$= \sin(y) - y \cdot \cos(x) = U(x,y)$$

Verificare che $dU = \omega$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= y \cdot \sin(x) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \cos(y) - \cos(x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow dU = y \cdot \sin(x) \cdot dx + (\cos(y) - \cos(x))\, dy \overset{\text{''}}{=} \omega$$