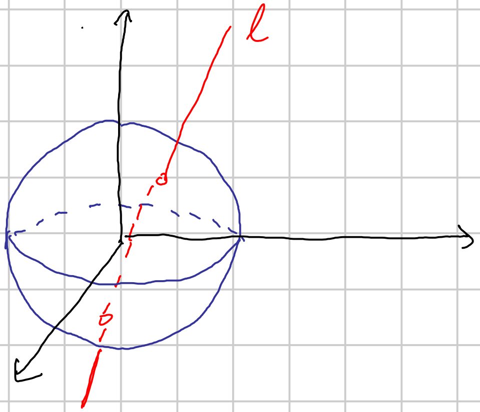
Esercitazione 17-05-19

12.2.2. Provare che la restrizione alla sfera unitaria della proiezione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è surgettiva e che rispetto ad essa ogni punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha due preimmagini.



$\{\text{Rette per l'origine}\} \leftrightarrow$ punti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Ogni retta per l'origine interseca S^n in esattamente 2 punti opposti.

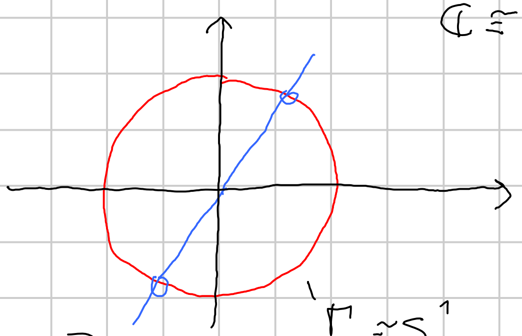
Surgettività: ogni retta per l'origine interseca S^n

2 preimmagini: $S^n \cap \ell$ è sempre una coppia di punti opposti su S^n.

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / _{x \sim -x}.$$

12.2.4. Posto $\Gamma = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$, provare che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si può identificare in modo naturale con l'insieme quoziente $\Gamma / \sim$, dove $z \sim w$ se $z^2 = w^2$ → Controllare che sia effettivamente una relazione di equivalenza.

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$



$\Gamma \cong S^1$

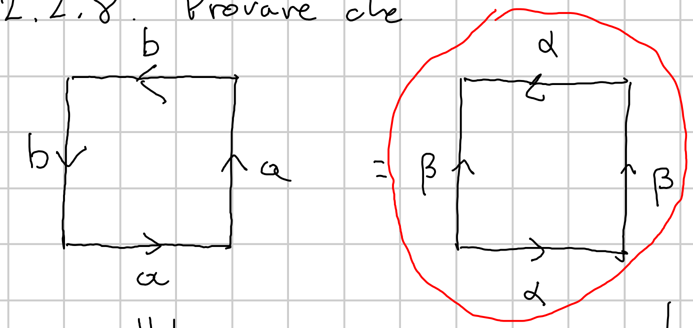
$$\Gamma \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$z = x + iy \longrightarrow [x : y]$$

$$\pi(z) = \pi(w) \iff \begin{matrix} z = w \\ \text{o} \\ z = -w \end{matrix} \iff (z-w)\cdot(z+w) = 0$$

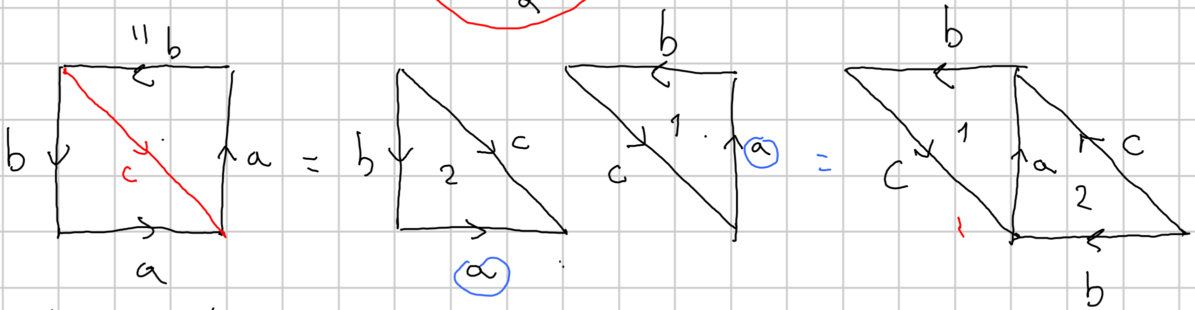
$\Updownarrow$

12.2.8. Provare che



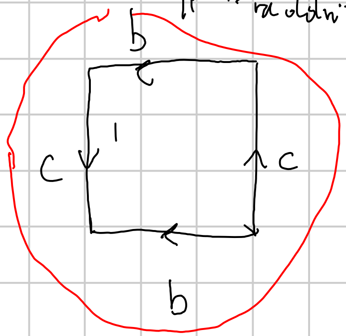
= Bottiglia di Klein

$$z^2 - w^2 = 0 \iff z^2 = w^2 \quad \square$$



tagliamo lungo c e reincolliamo lungo a

"raddrizzare"



12.2.10. Descrivere i punti all'∞ dell'insieme definito dall'equazione assegnata

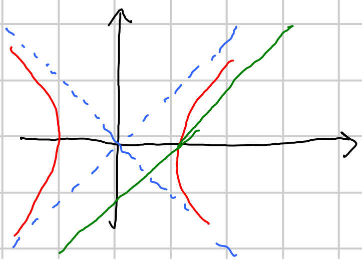
$$(*)\ x^3+y^3-x^2y-xy^2-x^2+y^2-x+y+1=0 \subset \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}_{\text{punti all'}\infty \text{ di } \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}$$

$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ vogliamo descrivere $\mathcal{L}_\infty$ = "pti all'∞ del completamento proiettivo $\bar{\mathcal{L}}$ di $\mathcal{L}$"

$$\bar{\mathcal{L}} = \underset{\underset{\mathbb{R}^2}{\cap}}{\mathcal{L}} \cup \underset{\underset{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}{\cap}}{\mathcal{L}_\infty}$$

$$(*)\ \underbrace{(x-y-1)}_{\text{retta}} \cdot \underbrace{(x^2-y^2-1)}_{\text{iperbole}} = 0$$



Iperbole: $[1:1]$

$[1:-1]$

Retta: $[1:1]$

Punti all'∞ sono: $[1:1]$ (doppio) e $[1:-1]$ (singolo).

Modo standard:

① Omogeneizzare il polinomio:

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2-x^2z+y^2z-xz^2+yz^2+z^3=0$$

- definisce un sottoinsieme di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $=: \overline{\mathcal{C}}$

Per trovare $\mathcal{C}_\infty$, poniamo $z=0$.

otteniamo $x^3+y^3-x^2y-xy^2=0$ Polinomio omogeneo di $2°$ grado in 2 variabili. $\subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ $=: \mathcal{C}_\infty$

$$\Updownarrow$$

$$x^2(x-y)+y^2(y-x)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x^2-y^2)\cdot(x-y)=0 \iff (x+y)\cdot(x-y)^2=0$$

$\to$ $[1:1]$ è doppio

$\to$ $[1:-1]$ - singolo.

12.2.11. Esibire un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$, definito da un'equazione di 3° grado nelle coordinate che abbia 3 punti all'∞ e che non contenga alcuna retta:

$xy(x-y)=1$

1) $x^2y - xy^2 - 1 = 0$

2) Omog. $x^2y - xy^2 - z^3 = 0$

3) Poniamo $z=0$ $\quad x^2y - xy^2 = 0 \quad x(xy-y^2)=0$

$x \cdot y \cdot (x-y) = 0 \to [1:0],\ [0:1],\ [1:1]$

Verificare che non contiene rette ($x^2y - xy^2 - 1 = 0$ non fattorizza) come prodotto di un polinomio di grado 2 e uno di grado 1).