Geometria 8/5/19

Visto: $\emptyset$, ellissoide, parab. ell., iperb. ell

$\emptyset$: $\mathcal{L}: x^2+y^2+z^2+1=0$ $\quad \overline{\mathcal{L}}: x^2+y^2+z^2+w^2=0 \quad \emptyset$

$\mathcal{L}_\infty: x^2+y^2+z^2=0 \quad \emptyset$

ellissoide $\mathcal{L}: x^2+y^2+z^2=1$ $\quad \overline{\mathcal{L}}: x^2+y^2+z^2=w^2$ ellissoide proiettivo

$\mathcal{L}_\infty: x^2+y^2+z^2=0 \quad \emptyset$

parab. ell $\mathcal{L}: z=x^2+y^2$ $\quad \overline{\mathcal{L}}: zw=x^2+y^2$

pongo $z=u+v$, $w=u-v$

$(u+v)(u-v)=x^2+y^2$

$u^2-v^2=x^2+y^2$

$x^2+y^2+v^2=u^2$ ellissoide proiettivo

$\mathcal{L}_\infty: x^2+y^2=0 \quad [0:0:1]$ un punto

iperb. ell $\mathcal{L}: x^2+y^2=z^2-1$ $\quad \overline{\mathcal{L}}: x^2+y^2=z^2-w^2$

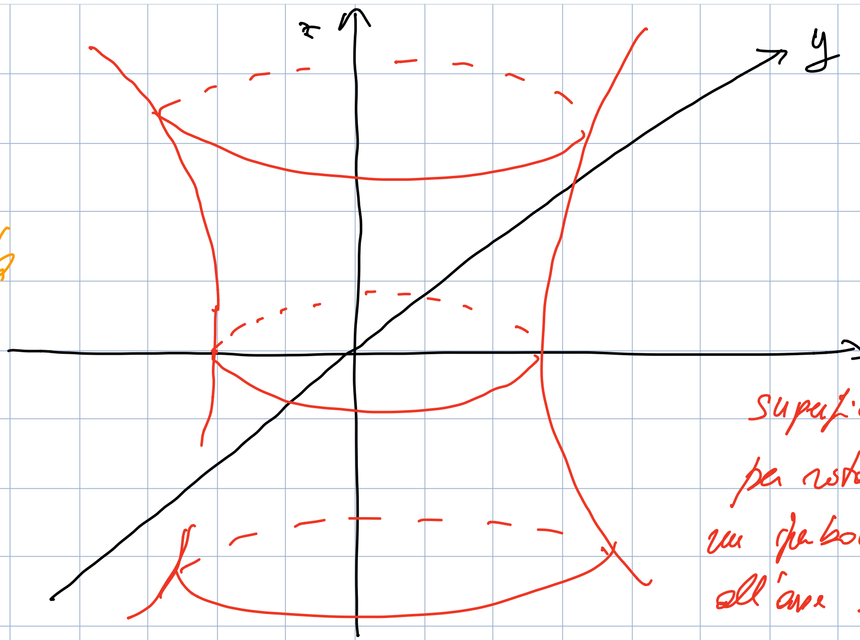
$x^2+y^2+w^2=z^2$ ellissoide proiettivo

$\mathcal{L}_\infty: x^2+y^2=z^2$ l'unica conica proiettiva non deg.

Iperboloide iperbolico $\quad x^2+y^2=z^2+1$

E' una superficie di rotazione intorno all'asse z.

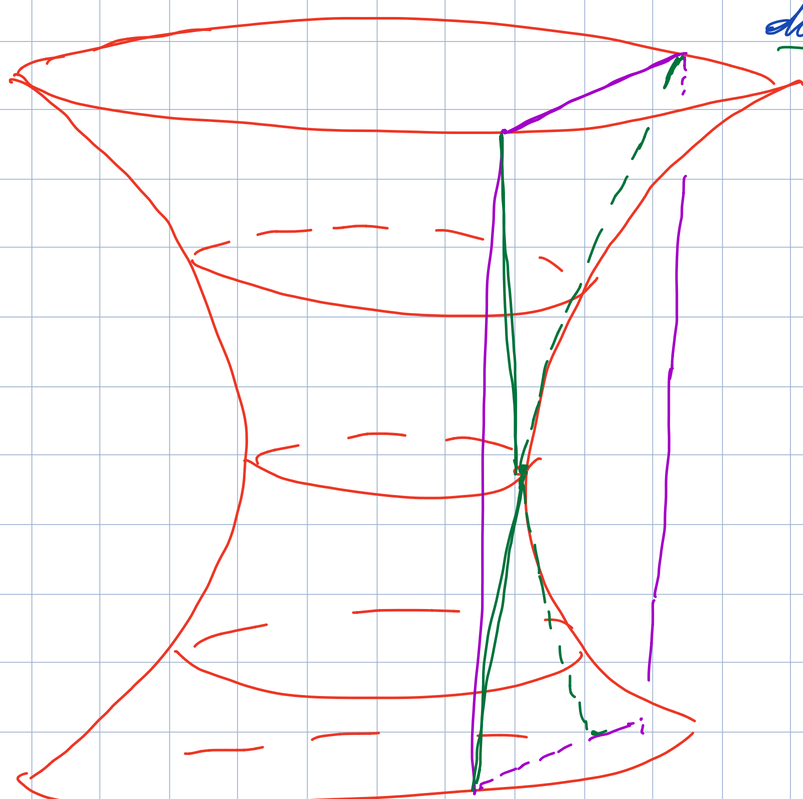
iperboloide
a una falda



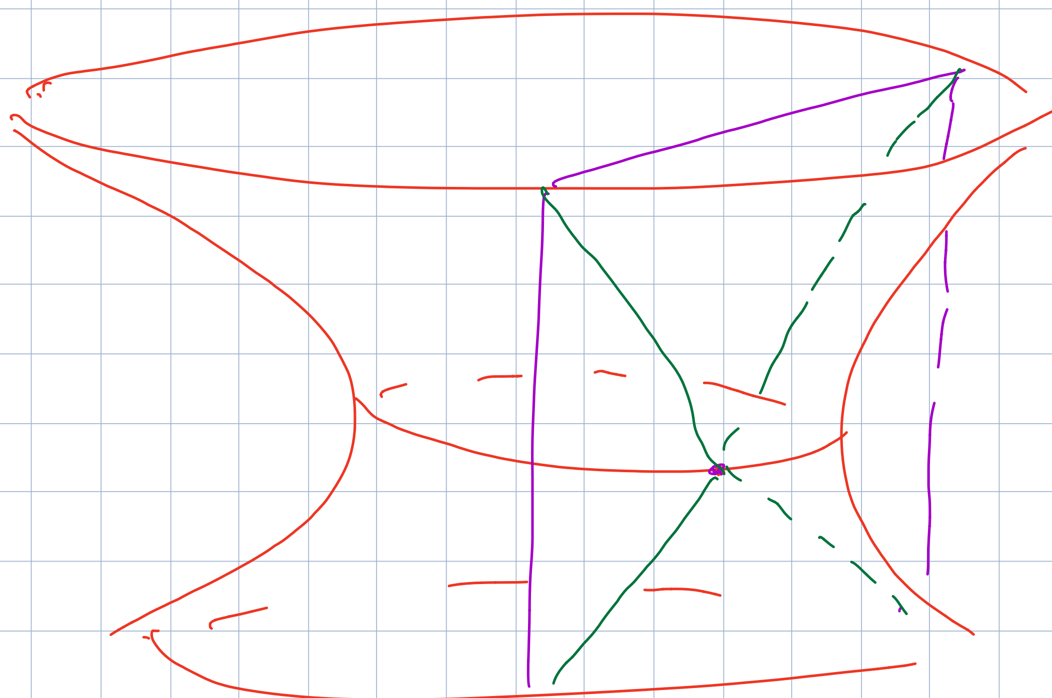
superficie ottenuta
per rotazione di
un iperbole intorno
all'asse secondario

$\Sigma: x^2+y^2 = z^2+1$

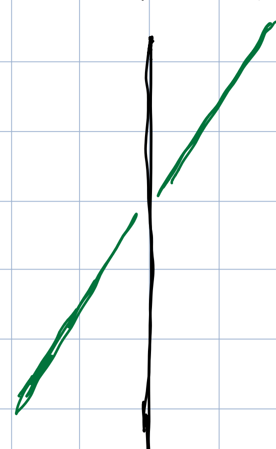
Interseco con piano $x=1$ trovo
$1+y^2 = z^2+1 \rightarrow y^2 = z^2 \rightarrow y = \pm z$
due rette



Poiché $\mathcal{L}$ è superficie di rotazione intersecandolo con qualsiasi piano ruotato intorno all'asse z del piano $x=1$ ottengo sempre due rette:



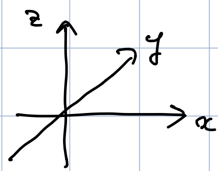
Anzi: l'intero $\mathcal{L}$ si ottiene facendo ruotare una qualsiasi di tali rette intorno all'asse z:



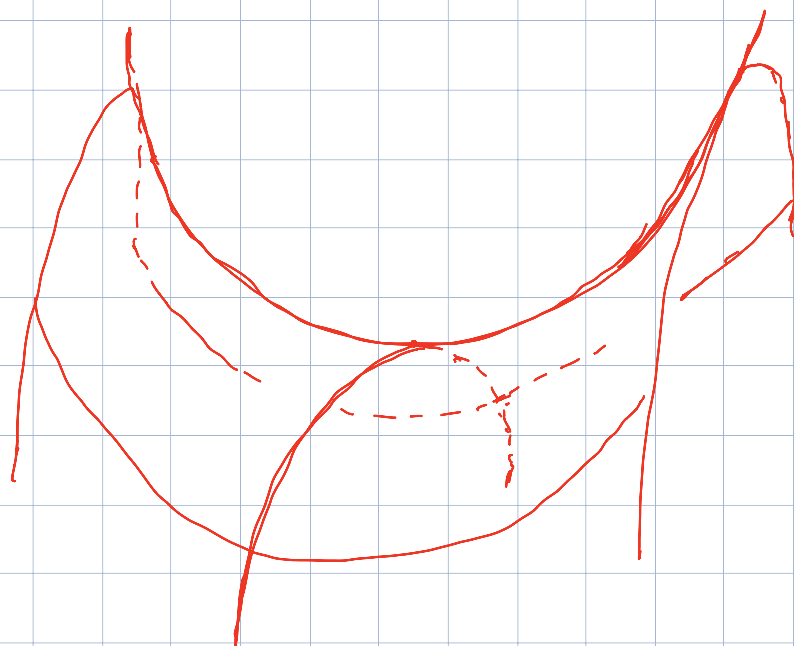
La rotazione della retta verde intorno alla nera produce l'iperboloide.

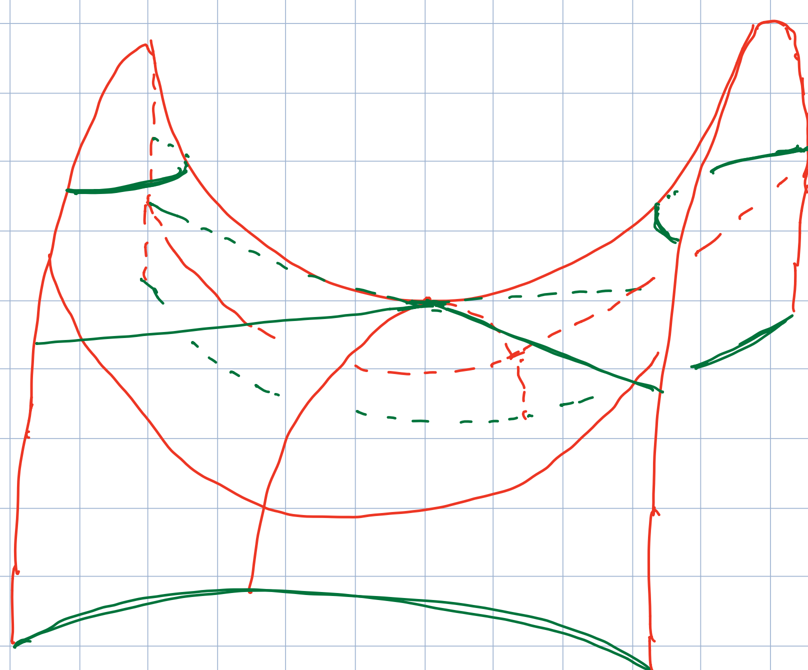
Paraboloide iperbolico

$z = x^2 - y^2$



paraboloide a sella





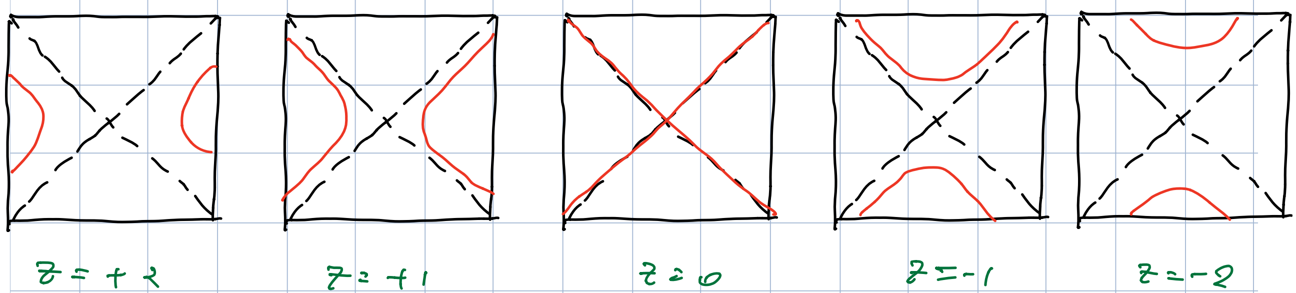
$z = x^2 - y^2$

$z = 0 \rightarrow x = \pm y$

$z = c > 0 \quad x^2 - y^2 = c$

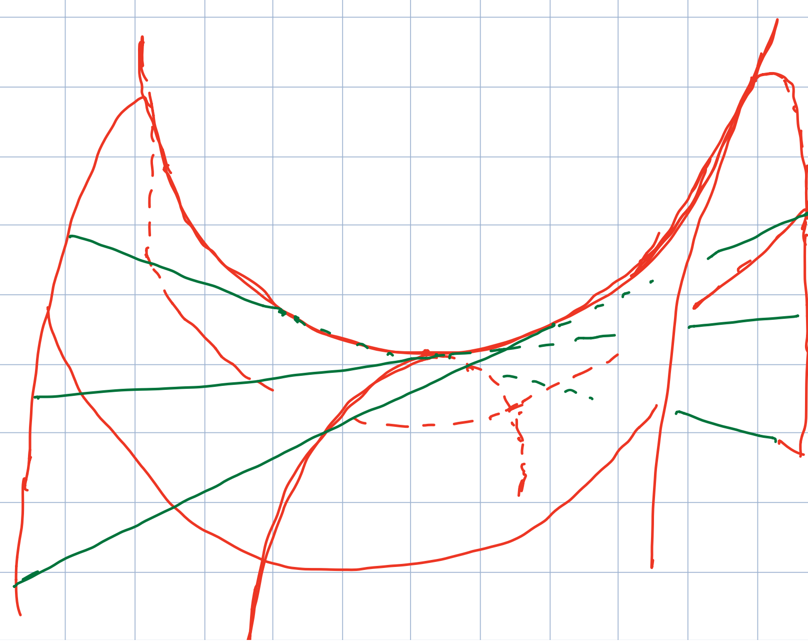
$z = c < 0 \qquad y^2 - x^2 = (-c)$

Film al tempo z:

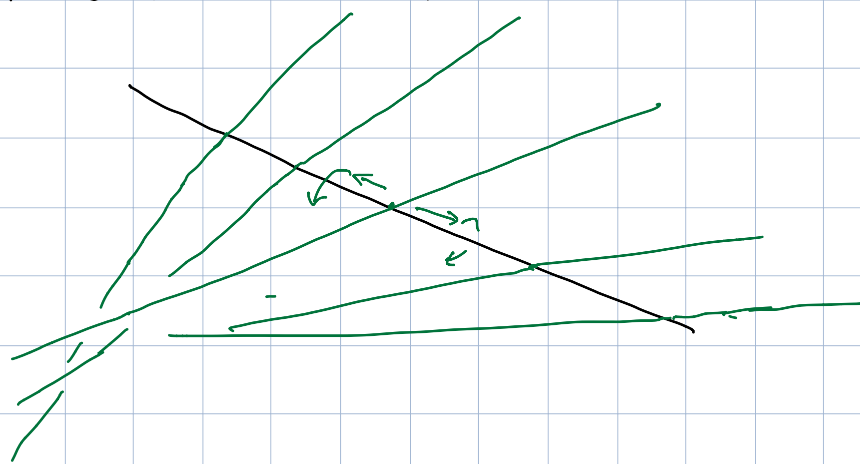


$$\mathcal{L}: \quad z = x^2 - y^2$$
$$z = (x+y)(x-y)$$

Intersecando con qualsiasi piano $x+y = \text{cost}$ oppure $x-y = \text{cost}$ trovo una retta.



Quindi $\mathcal{L}$ è ottenuto così:



Iperb. iperb. $\mathcal{L}: x^2+y^2=z^2+1$

$\overline{\mathcal{L}}: x^2+y^2=z^2+w^2$ iperboloide proiettivo

$\mathcal{L}_\infty: x^2+y^2=z^2$ unica conica proiettiva non deg.

Parab. iperb.: $\mathcal{L}: z=x^2-y^2$

$\overline{\mathcal{L}}: zw=x^2-y^2$ $\quad z=u+v \quad w=u-v$

$u^2-v^2=x^2-y^2 \qquad u^2+y^2=x^2+v^2$ iperboloide proiettivo

$\mathcal{L}_\infty: x^2-y^2=0 \qquad x=\pm y$ due rette

Esercizio: visualizzare.

Teo: ogni $\mathcal{L}=\left\{x\in\mathbb{R}^3 : {}^t\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=0\right\}$

$A\in M_{4\times4}$ simm. $\det(A)\neq 0$ si trasforma con un cambio di coord. affine in uno dei 6 modelli visti.

— o —

10.2.4 Stabilire se A è normale; se sì ... applicare teo spettrale

(a) $A = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-i & -3i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 2-i & -3i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 14 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

NO

(c) $A = \begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}$ non è hermitiana
non è antihermitiana

$\det(A) = 49(1-i)^2 - (1+i)^2 = 49(-2i) - (2i) = -100i$

$$\begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7+7i & 1-i \\ 1-i & 7+7i \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 7+7i & 1-i \\ 1-i & 7+7i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Scoperto: $A = 10$ volte una unitaria

$\Rightarrow$ normale

$$p_A(t) = t^2 - tr(A)\cdot t + det(A)$$
$$= t^2 - 14(1-i)t - 100i$$

$$\lambda_{1,2} = 7(1-i) \pm \sqrt{49(1-i)^2 + 100i}$$
$$= 7(1-i) \pm \sqrt{2i} = 7(1-i) \pm (1+i) = \begin{cases} 8-6i \\ 6-8i \end{cases}$$

v_1: $\begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (8-6i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (7-7i)x + (1+i)y = (8-6i)x \\ (1+i)x + (7-7i)y = (8-6i)y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(1+i)x + (1+i)y = 0 \\ (1+i)x - (1+i)y = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v_2 ... $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7+i & 5+5i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7+i & 5+5i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5-5i & -7-i \\ 1-7i & 5-5i \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 5-5i & -7-i \\ 1-7i & 5-5i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7+i & 5+5i \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 10-10i \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 100 & 10-10i \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\cancel{-35}\ \cancel{-35i}$$
$$+5\ -5i$$
$$\cancel{+5}\ \cancel{+35i}$$
$$\cancel{35}\ -5i$$

$$5-5i$$
$$\cancel{35}\ \cancel{+35i}$$
$$\cancel{-35}\ -5i$$
$$5\ \cancel{-35i}$$

$\underline{1i}$ + cercare autoval/autovett.

10.2.5. Verificare che A è unitaria

(b) $$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & -i \\ -i\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ i & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Devo verificare che $A^* \cdot A = I_3$ oppure (equivalente) che $A = (v_1, v_2, v_3)$ è base ortonormale di $\mathbb{C}^3$:

$$\|v_1\|^2 = \frac{1}{4}(1+2+1) = 1$$
$$\|v_2\|^2 = \frac{1}{4}(2+0+2) = 1$$
$$\|v_3\|^2 = \frac{1}{4}(1+2+1) = 1$$

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \frac{1}{4}\left(1\cdot(+i\sqrt{2}) + (-i\sqrt{2})\cdot 0 + i(-\sqrt{2})\right) = 0$$
$$\langle v_1 | v_3 \rangle = \frac{1}{4}\left(1\cdot(+i) + (-i\sqrt{2})\sqrt{2} + i\cdot 1\right) = 0$$
$$\langle v_2 | v_3 \rangle = \frac{1}{4}\left(-i\sqrt{2}(+i) + 0\cdot\sqrt{2} + (-\sqrt{2})\cdot 1\right) = 0$$ $\underline{\text{OK}}$

10.2.6 Trovare segni autoval. A.

(c) $$A = \begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 0 & 1+i \\ -1 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

hermitiana
$\Rightarrow$ autoval. reali; segni dati/di

$d_1 = 2$

$d_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -1$

$d_3 = 2\cdot 0\cdot 2 + i(1+i)\cdot(-1) + (-1)(-i)(1-i)$

$\quad -(-1)\cdot 0\cdot(-1) - i(-i)\cdot 2 - 2(1+i)(1-i)$

$\quad = 1 - i$

$\quad\quad 1 + i$

$\quad\quad -2$

$\quad\quad -4 = -4$

segni autoval: $+, -, +$.

10.2.7. Trovare tipo di A e forma canonica su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

(b) $A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -12 \\ 4 & -12 & -3 \end{pmatrix}$

È simmetrica e anche unitaria: $A = (v_1, v_2, v_3)$

$\|v_j\|^2 = \frac{1}{13^2}\Big(\underbrace{12^2 + \underbrace{3^2 + 4^2}_{5^2}}_{13^2}\Big) = 1$

$\langle v_1, v_2\rangle = \frac{1}{13^2}(36 + 12 - 48) = 0$

$\langle v_1, v_3\rangle = \frac{1}{13^2}(48 - 36 - 12) = 0$

$\langle v_2 / v_3\rangle = \frac{1}{13^2}(12 - 48 + 36) = 0$.

Poiché è simmetrica si diagonalizza via unitaria; ma è unitaria ⇒ ha autoval di modulo 1 ⇒ solo ± 1.

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$tr = 3 \qquad tr = 1 \qquad tr = -1 \qquad tr = -3$

giusta questa

(d) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -69 \end{pmatrix}$

A simmetrica.

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-5 & 2 & -3 \\ 2 & t-1 & -7 \\ -3 & -7 & t+69 \end{pmatrix} \qquad (t^2-6t+5)(t+69)$$

$$\begin{aligned} = \; & t^3 - 6t^2 + 5t \\ & +69t^2 - 414t + 345 \\ & +42 \\ & +42 \\ & -9t \quad +9 \\ & -4t \quad -276 \\ & -49t \quad +245 \end{aligned}$$

$$= t^3 + 63t^2 - 471t + 407$$

$$= (t-1)(t^2 + 64t - 407)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = 32 \pm \sqrt{1024 - 407}$

$= 32 \pm \sqrt{617}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 5x - 2y + 3z = x \\ -2x + y + 7z = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y + 3z = 0 \\ -2x \qquad + 7z = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{49 + 17^2 + 4}} \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$v_{2,3}$ .... poiché $\lambda_{1,2,3}$ sono distinti le 3 rette autospazio sono univoche e dunque $\perp$ tra loro; pertanto basta prendere $v_{2,3}$ unitari e si ottiene (v_1, v_2, v_3) base ortonormale che diagonalizza A.

(7) $\begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

E' antisimm. 3×3 $\Rightarrow$ ha autoval. $0, \pm \alpha i$ e forma canonica $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & 7 & -4 \\ -7 & t & -5 \\ 4 & -5 & t \end{pmatrix}$$

$$= t^3 - 140 + 140 + t(16 + 49 + 1)$$

$$= t(t^2 + 66) \qquad \alpha = \sqrt{66}$$

(b) $\begin{pmatrix} 6 & 2-i \\ 2+i & 10 \end{pmatrix}$

E' hermitiana $\Longrightarrow$ autoval. reali e si diagonalizza via unitaria.

$tr(A) = 16 \qquad det(A) = 60 - 5 = 55$

$$p_A(t) = t^2 - 16t + 55$$

$$\lambda_{1,2} = 8 \pm \sqrt{64-55} = 8 \pm 3 \begin{array}{l} \nearrow 11 \\ \searrow 5 \end{array}$$

$$v_1 : \begin{cases} 6x + (2-i)y = 11x \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} -5x + (2-i)y = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 : \begin{cases} 6x + (2-i)y = 5x \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} x + (2-i)y = 0 \end{cases}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2-i \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Devono</u> venire automaticamente $\perp$ tra loro; infatti:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2-i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} = (2-i)(2+i) + 5 \cdot (-1) = 0$$

OK.