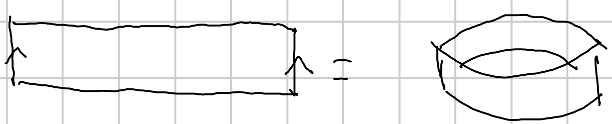
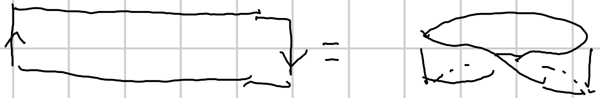
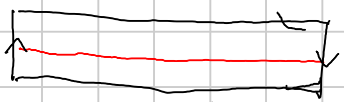
Lezione 02-05-19

Cilindro  → 2 componenti di bordo

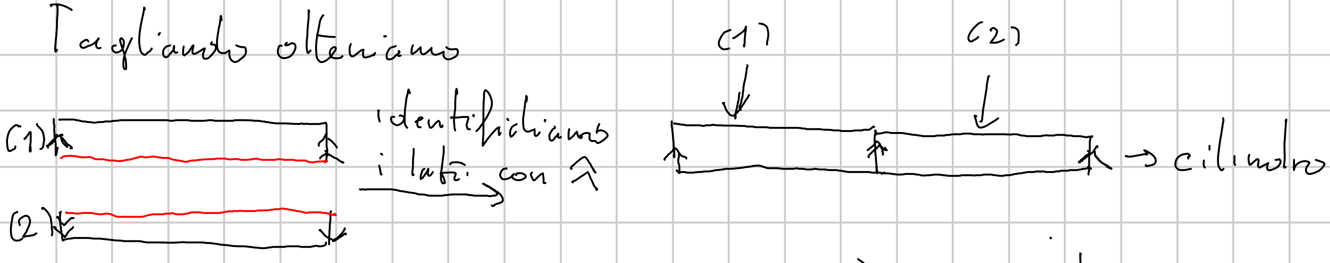
Nastro di Möbius  → 1 sola componente di bordo



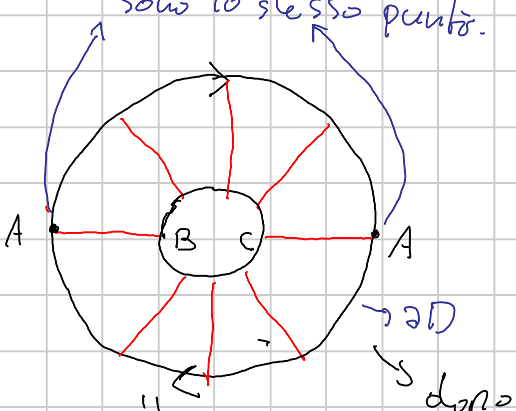
Cosa succede se taglio il nastro di Möbius lungo la linea rossa?

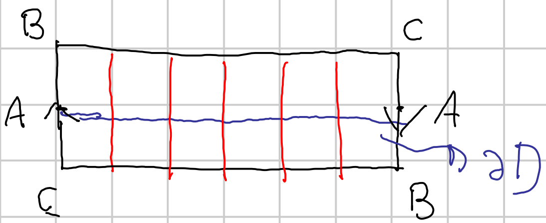
Si ottiene un cilindro,

Tagliando otteniamo

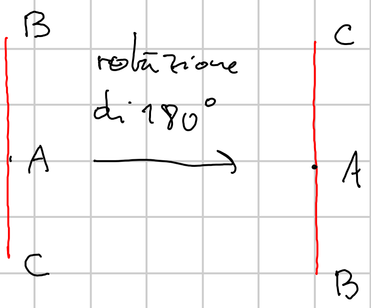


Altro esercizio: Mostrare che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus (\text{dischetto}) =$ Nastro di Mobius.





dopo aver fatto "mezzo giro" torniamo sullo stesso segmento



$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus$ disco "=" Nastro di Mobius:

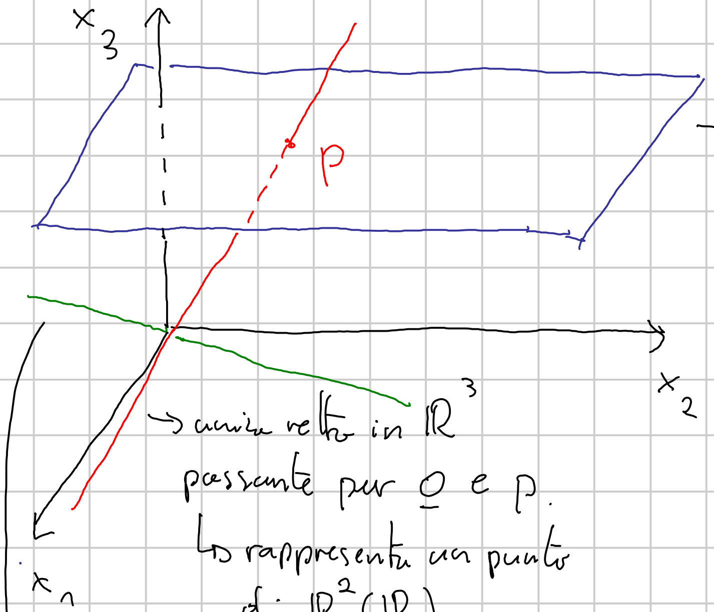
Identificare i segmenti disegnati in rosso

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ = "l'insieme delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^{n+1}$" :=

$$= \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \big/ y \sim x$$

con $y \sim x$ se $y = t \cdot x$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Caso $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



$\to \{x_3 = 1\} = \mathbb{R}^2$

$\to$ unica retta in $\mathbb{R}^3$ passante per $\underline{O}$ e p.

↳ rappresenta un punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Quindi a ogni $p \in \mathbb{R}^2$, corrisponde un unico punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

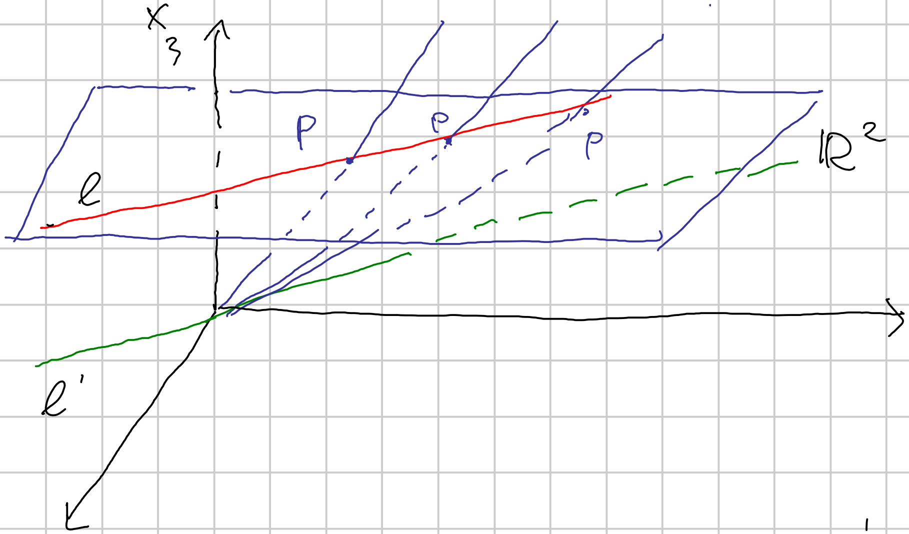
Quindi $\mathbb{R}^2 \subsetneq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$..

↳ rette passanti per l'origine e contenute in $\{x_3 = 0\}$, non intersecano $\mathbb{R}^2$

↳ a queste rette corrisponde $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (dopo avere proiettivizzato $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim$)

Quindi $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

In generale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ (anche con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ invece di $\mathbb{R}$)



ℓ retta affine in $\mathbb{R}^2 = \{x_3 = 1\}$

ℓ' retta passante per l'origine e parallela a ℓ.

$\ell' \leadsto$ un punto in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Facendo tendere p all'∞ (verso gli estremi della retta affine ℓ), le rette corrispondenti in $\mathbb{R}^3$ tendono a ℓ'

Se $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$ è una successione di punti in una retta affine in $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, tendente all'$\infty$. Allora il limite della successione $\{P_i\}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è un punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$

- I punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ da aggiungere a $\mathbb{R}^2$ per ottenere $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono i punti all'infinito che corrispondono alle direzioni delle rette affini in $\mathbb{R}^2$.

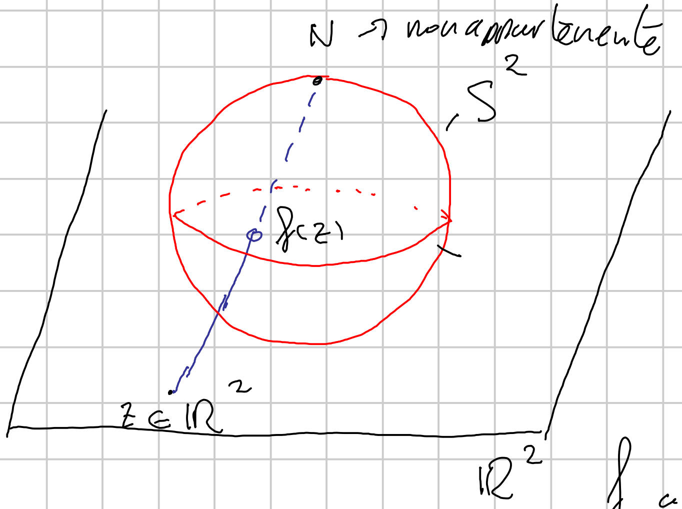
Oss: Due rette parallele in $\mathbb{R}^2$ definiscono lo stesso punto all'∞ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, indipendentemente dal verso.

$\mathbb{P}^0(\mathbb{C}) =$ un punto.

$\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$
"||"

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_2 = 1\} \cup \mathbb{P}(\{z \in \mathbb{C}^2 : z_2 = 0\}) = \mathbb{C} \cup \{\text{un punto all'}\infty\}$

"
Sfera S^2



f proiezione stereografica

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$

f associa a un punto $z \in \mathbb{R}^2$, l'unico punto di intersezione tra S^2 e il segmento che unisce z a N.

È una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ e $S^2 \setminus \{N\}$

Aggiungere a $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ un punto all'∞ è come aggiungere N a $S^2 \setminus \{N\}$, producendo S^2 (la sfera). $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) =$ sfera.

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \underset{\substack{\parallel \\ S^2 \setminus \{N\}}}{\mathbb{C}} \cup \underset{\substack{\parallel \\ \{N\}}}{\{\text{punto}\}}.$$

tramite la proiezione stereografica.

- Sottospazio proiettivo.

Def: Chiamiamo <u>sottospazio proiettivo</u> di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, l'immagine in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di $W \setminus \{0\}$, dove W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n+1}$.

(X è l'immagine di $W \setminus \{0\}$, dove W è $\underbrace{\text{di}}_{\text{s.s.v}}$ $\mathbb{R}^{n+1}$ tramite la mappa

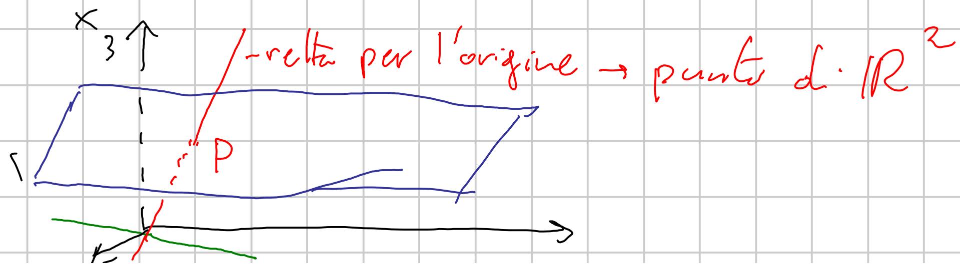
$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$$

- Se $\dim W = k \geq 1$, $\dim X = k-1$.

Osservazione: I sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sono a loro volta spazi proiettivi.

Esempi: sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

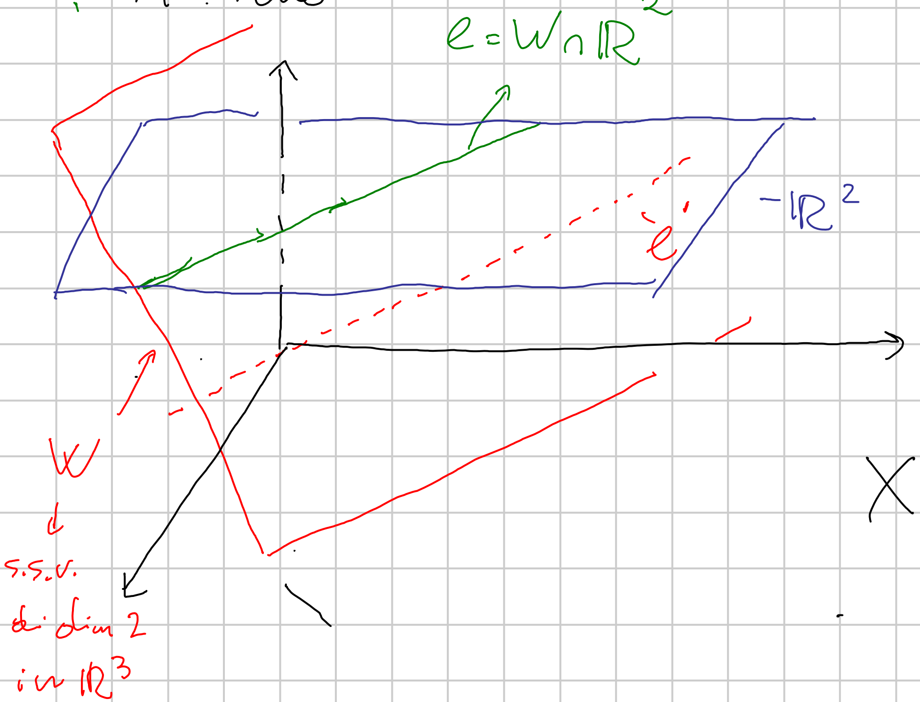
- $\dim 0 = \{\text{punti di } \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\}$



∞ punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

(retta in $x_3=0$)

- dim. 1 : rette



ℓ' è il traslato nell'origine della retta $\ell = W \cap \mathbb{R}^2$

X = sottospazio proiettivo corrispondente a W

$$X = \ell \cup \mathbb{P}\{\ell'\} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$= \mathbb{R} \cup \{\text{punto}\}$$

- dim = 2 : tutto $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Proposizione: Due rette proiettive distinte di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si intersecano sempre in un solo punto. In particolare se non sono la retta all'∞ (cioè sono due rette affini più un punto all'infinito) si intersecano in un punto al finito (cioè un punto di $\mathbb{R}^2$) se sono incidenti o all'∞ (cioè in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$) se sono parallele.

Dim: ℓ_1 immagine di $W_1 \subset \mathbb{R}^3$, $\dim W_1 = 2$.

ℓ_2 immagine di $W_2 \subset \mathbb{R}^3$, $\dim W_2 = 2$.

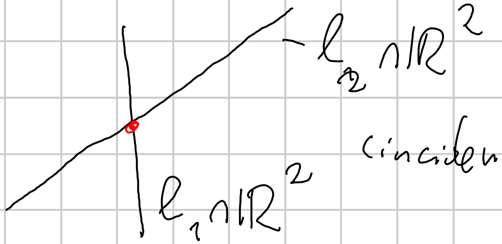
Poiché $\ell_1 \neq \ell_2$, certamente $W_1 \neq W_2$ sono s.s.v. distinti di $\mathbb{R}^3$.

Quindi (formula della dimensione), $W_1 \cap W_2 = \ell \subset \mathbb{R}^3$, con $\dim(\ell) = 1$.

$\Rightarrow \ell_1 \cap \ell_2 =$ immagine di $W_1 \cap W_2 = \ell$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = un punto.

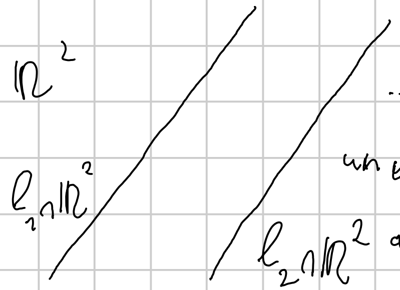
2 casi possibili

$\mathbb{R}^2$:



(incidenti)

oppure



... determinano un unico punto all'∞, che corrisponde a $\ell_1 \cap \ell_2$.