Esercitazione 26-04-19

10.2.1. Trovare gli autovalori della matrice A assegnata e una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

$$A = \begin{pmatrix} 5/3 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad \underline{\text{simmetrica.}}$$

① Trovare gli autovalori

② Trovare una base di autovettori.

③ Se λ è un autovalore con $m_g(\lambda) \underset{\neq}{\geq} 1$. Trovare una base ortogonale per $V_\lambda = \{ v \in \mathbb{R}^3 : A \cdot v = \lambda \cdot v \}$ - usare Gram-Schmidt

$p_A(t) = \det(t \cdot I - A) = t^3 - \frac{53}{3} t^2 + \frac{227}{3} \cdot t - 59.$

① $p_A(t) = 0 \Leftrightarrow (3p_A)(t) = 3t^3 - 53t^2 + 227t - 177 = 0$

Se $\lambda = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, con a, b coprimi, allora $a \mid 177$, $b \mid 3$

$a \in \{ \pm 1, \pm 3, \pm 59, \pm 177 \}$.

$b \in \{ \pm 1, \pm 3 \}$

$\lambda_1 = 1$ è radice di $p_A(t)$, e quindi autovalore.

$$3t^3 - 53t^2 + 227t - 177 = (t-1)\cdot(3t^2 - 50t + 177)$$

Gli altri autovalori sono

$$\lambda_{2,3} = \frac{50 \pm \sqrt{376}}{6} = \frac{50 \pm 2\sqrt{94}}{6} = \frac{25 \pm \sqrt{94}}{3}.$$

- Cerchiamo un autovettore v_1 per $\lambda_1 = 1$.

$$I - A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 2 \\ 1 & 8 & -3 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{Autovettore } v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(I-A)$$

- Cerchiamo un autovettore v_2 per $\lambda_2 = \frac{25+\sqrt{94}}{3}$

$$\lambda_2 \cdot I - A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{94}+20}{3} & 1 & 2 \\ 1 & \frac{\sqrt{94}-2}{3} & -3 \\ 2 & -3 & \frac{\sqrt{94}+4}{3} \end{pmatrix}$$

Autovettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{94}-2}{3} \\ -3 \end{pmatrix} \in \ker(\lambda_2 I - A)$

Autovettore v_3 per λ_3. $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{94}-2}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza A.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 5/3 \end{pmatrix}$

Autovalori $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \frac{-2+\sqrt{139}}{3}$ $\quad \lambda_3 = \frac{-2-\sqrt{139}}{3}$.

v_1 autovettore per $\lambda_1 = 4$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

V_2 autovettore per λ_2 $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{139}-7}{15} \\ \frac{-\sqrt{139}+2}{15} \end{pmatrix}$

V_3 autovettore per λ_3 $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{139}-7}{15} \\ \frac{\sqrt{139}+2}{15} \end{pmatrix}$

10.2.2. Determinare i segni degli autovalori della matrice A assegnata.

(b): $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. d_i = determinante della matrice ottenuta considerando le prime i righe e i colonne di A.

$d_1 = \det(3) = 3 > 0 \rightarrow$ c'è un autovalore > 0

$d_2 = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0 \quad \frac{d_2}{d_1} < 0 \rightarrow A$ ha un autovalore < 0.

$d_3 = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -2 & -14 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

2. $\det \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -14 \end{pmatrix} < 0$.

$\frac{d_3}{d_2} > 0 \rightsquigarrow$ autovalore positivo.

$d_1 > 0$, $\frac{d_2}{d_1} < 0$, $\frac{d_3}{d_2} > 0 \rightsquigarrow A$ ha 2 autovalori positivi.
1 autovalore negativo.

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$d_1 = -1 < 0$

$d_2 < 0$

$d_3 = \det A > 0$.

$d_1 < 0$, $\frac{d_2}{d_1} > 0$, $\frac{d_3}{d_2} < 0 \rightarrow$ A ha 2 autovalori negativi
1 autovalore positivo.

10.2.3. Provare che la funzione f assegnata ha un punto critico nell'origine, determinare la matrice Hessiana di f in $\underline{0}$ e stabilire se f sia o meno un massimo o un minimo relativo per f.

(b) $f(x,y) = x^2 \cdot \cos(xy) + 2y^2 - 3xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) - 3y. \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^3 \sin(xy) + 4y - 3x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ è un punto critico per } f.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -x^2 y^2 \cos(xy) - 4xy \sin(xy) + 2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^4 \cdot \cos(xy) + 4.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -x^3 y \cos(xy) - 3x^2 \cdot \sin(xy) - 3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$H_{(0,0)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 2 > 0$

$\Rightarrow H_{(0,0)}(f)$ ha un autovalore positivo e uno negativo.

$d_2 = -1 < 0$

$\Rightarrow (0,0)$ non è né un max né un minimo per f.

(punto di sella).