Esercitazione 04-04-19

10.1.2. Determinare gli autovalori dell'applicazione lineare f assegnata o dell'applicazione lineare associata alla matrice A data.

1 (b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ +1 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(t) = \det(A - t \cdot Id) =$

$$= \det \begin{pmatrix} -3-t & 0 \\ 1 & 7-t \end{pmatrix} = -(3+t)\cdot(7-t)$$

Radici $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 7 \end{matrix}\right\}$ autovalori di f_A

In generale se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ triangolare superiore

- triangolare inferiore, gli autovalori sono elementi della diagonale.

(d) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 4-t & -3 \\ -3 & 1-t \end{pmatrix} =$

$= t^2 - 5t - 5 \rightarrow$ In generale se $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$P_A(t) = t^2 - (tr.(A)) \cdot t + \det(A)$$

$\lambda_{1,2}$ radici di $P_A(t)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Notiamo che A è una matrice reale e simmetrica.

Quindi per il teorema spettrale è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(f) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(t) = t^2 - 7t + 14.$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-56}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{7 \pm i\sqrt{7}}{2} \quad \lambda_1 = \frac{7+i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7-i\sqrt{7}}{2}$$

A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, ma è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

(h) $A = \begin{pmatrix} 1+i & -\frac{1}{5}(7+i) \\ 2-i & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

$p_A(t) = t^2 + (-i-4)\cdot t + (2i+6)$

$\Delta = -9 = (-i-4)^2 - 4(2i+6)$, $\sqrt{\Delta} = \pm 3i$

$\lambda_{1,2} = \frac{i+4 \pm 3i}{2}$, $\lambda_1 = 2+2i$, $\lambda_2 = 2-i$. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono distinti.

A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

(j) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

sviluppiamo lungo la 1a colonna.

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 3 & -3 \\ 0 & -1-t & 3 \\ 2 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)\cdot\Big((1+t)\cdot(t-1)\Big) + 2\cdot\Big(9-3(t+1)\Big) = -t^3+2t^2-5t+10.$$

- Fatto: Se $p(t) = a_n \cdot t^n + a_{n-1}\cdot t^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$

Se $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ è radice di $p(t)$, allora $m \mid a_0$ e $n \mid a_n$

(m, n coprimi)

Quindi se $p_A(t)$ ammette una radice razionale, questa deve appartenere all'insieme $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$.

$\lambda_1 = 2$ è radice. Quindi $p_A(t)$ è divisibile per $t-2$.

$$\begin{array}{l|l} -t^3+2t^2-5t+10 & t-2 \\ \hline t^3-2t^2 & -t^2-5 \\ \hline \quad -5t+10 & \end{array}$$

, quindi

$$p_A(t) = -(t-2)\cdot(t^2+5)$$

Le radici di $p_A(t)$ sono $\lambda_1 = 2$, $\underbrace{\boxed{\lambda_2 = i\sqrt{5},\ \lambda_3 = -i\sqrt{5}}}$ radici di t^2+5.

(L) $f : V \to V \quad V = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \}$

$$f(x) = \begin{pmatrix} -3x_1 - 8x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} = y_1 \\ = y_2 \\ = y_3 \end{array}$$

Osserviamo che $f(V) \subseteq V$

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = -3x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 - x_1 - 2x_2 + 8x_3 =$$

$$-2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2(x_1 + 2x_2 - x_3).$$ Se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$, allora

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 - y_3 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \in V$$

Costruiamo una base $B = \{v_1, v_2\}$ di V.

Prendiamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e scriviamo $[f]^B_B$

$f(v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} = -v_1 - 3v_2$

$f(v_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -14 \end{pmatrix} = -4v_1 - 5v_2$

$A = [f]^B_B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

$\Delta = 64$

$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} -1-t & -4 \\ -3 & -5-t \end{pmatrix} = t^2 + 6t - 7$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$ $\quad \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -7$ autovalori di f.

(n) $f: V \to V \quad V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : p(1) = 0\} \quad \dim V = 2.$

$f(p(t)) = (t-1) \cdot p'(t) + (t^2-1) \cdot p(-2).$

$f: \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$

Autovalori sono $3+\sqrt{10}$, $3-\sqrt{10}$

$\ker f \neq \underline{0}$, poiché $\mathrm{Im}(f) = V$, quindi il 3° autovalore è 0.

Verifichiamo che $f(V) \subseteq V$

Se $p(t) \in V$, allora $p(1) = 0$

$f(p(t))\big|_1 = \underbrace{(t-1) \cdot p'(t)}_{0} + \underbrace{(t^2-1) \cdot p(-2)}_{0}\Big|_{t=1} = 0 \Rightarrow f(p(t)) \in V$

valutiamo in 1

∘ Cerchiamo una base B di V. $B = \{\underbrace{t-1}_{p_1(t)}, \underbrace{t^2-1}_{p_2(t)}\}$

Scriviamo $A = [f]_B^B$

$f(p_1(t)) = (t-1) - 3\cdot(t^2-1)$

$f(p_2(t)) = (t-1)\cdot 2t + (t^2-1)\cdot 3 = -2\cdot(t-1) + 5(t^2-1)$

$$A = [f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad p_A(t) = t^2 - 6t - 1.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} \qquad \lambda_1 = 3+\sqrt{10}, \ \lambda_2 = 3-\sqrt{10}$$

10.1.6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$; e sia $f: V \to V$ lineare. Sia $W \subset V$ sia ssv. tale che $f(W) \subseteq W$. Sia $g: W \to W$ l'applicazione definita da $g(w) = f(w)$ $\forall w \in W$. Provare che il polinomio caratteristico di f è un multiplo di quello di g.

Idea: scegliere una "buona" base per V.

Supponiamo che $\dim W = k < n = \dim V$.

Prendiamo $B' = \{w_1, \dots, w_k\}$ base di W.

Sia $B = \{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ una base di V ottenuta tramite completamento a partire da B'.

$$[f]_B^B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overbrace{}^{k} & \overbrace{}^{n-k} \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} C & E \\ \hline 0 & \underbrace{D}_{n-k} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \} n-k \end{array} \end{array} = A$$

$$\left| f(W) \subseteq W \right.$$

$$C = [g]_{B'}^{B'}$$

$$p_A(t) = \det(A - t \cdot Id) = \det \left(\begin{array}{c|c} C - t \cdot I_k & E \\ \hline 0 & D - t \cdot I_{n-k} \end{array}\right) =$$

$$= \underbrace{\det(C - t \cdot I_k)}_{\text{polinomio caratteristico di } g.} \cdot \det(D - t \cdot I_{n-k})$$

Esercizio: In generale $\det \left(\begin{array}{c|c} C & E \\ \hline 0 & D \end{array} \right) = \det(C) \cdot \det(D)$

(Per induzione su k = ordine di D), usare lo sviluppo di Laplace del determinante

10.1.7. Sia V uno sp. vettoriale di dim. finita su $\mathbb{K}$, e $f: V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.
Determinare quali $\lambda \in \mathbb{K}$ possono essere autovalori di una tale f e descrivere tutte le f siffatte che sono diagonalizzabili.

Osserviamo che, poiché $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, allora $f^2(v) = 0 \ \forall v \in V$

$\forall v \in V$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{f(f(v))} = 0$

$f(v) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$,

quindi $f(f(v)) = 0$.

L'unico autovalore possibile è 0.

Supponiamo per assurdo che esista $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di f.

Esiste un vettore $\underset{\neq 0}{v} \in V$ tale che $f(v) = \lambda \cdot v$

$$f(f(v)) = f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot \lambda \cdot v = \lambda^2 \cdot v = 0.$$

$f^2 \equiv 0 \Uparrow$ poiché $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

Assurdo poiché $\lambda \neq 0$ e $v \neq 0$.

Supponiamo che f così fatta sia diagonalizzabile.

Allora esiste una base B di V di autovettori per f.

Poiché $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$ f ha come unico autovalore $0 \in \mathbb{K}$.

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix} \Rightarrow f \equiv 0.$$

matrice
nulla

10.1.8. Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che ogni matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ha almeno un autovalore reale.

∘ Per n dispari almeno un autovalore reale

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$p_A(t) = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[t]$ di grado n.

$p_A(t)$ ha esattamente n radici complesse contate con molteplicità.

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è radice di $p_A(t) \in \mathbb{R}[t]$, allora anche $\bar{\lambda}$ è radice di $p_A(t)$.

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{a_n \cdot \lambda^n + \dots + a_0} = \overline{0}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \cdot \bar{\lambda}^n + a_{n-1} \cdot \bar{\lambda}^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ è radice di } p_A(t)$$

Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è radice di $p_A(t)$, allora anche $\bar{\lambda}$ è radice di $p_A(t)$

Il numero di radici in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ di $p_A(t)$ è un # pari

$\Rightarrow$ Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, con n dispari, allora $p_A(t)$ è un polinomio a coeff. reali di grado dispari, ha n radici (contate con molteplicità) e almeno una radice reale.

Se n è pari $n = 2m$ $A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ - A ha autovalori $\pm i$