Geometria 28/3/19

2x2 un solo autoval non diagonale $\Rightarrow$ non diagonalizzabile.

Oss: se f è diagonalizzabile $\exists \mathcal{B}$ t.c. $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad p_f(t) = \det\left(t I_n - [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda_n \end{pmatrix} = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$$

$\Rightarrow$ $p_f(t)$ ha le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Fatto: un polinomio in $\mathbb{C}[t]$ di grado n ha sempre n radici (con molteplicità). Per $\mathbb{R}[t]$ non è vero.

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = t^2+1$

ha radici $\pm i \notin \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ A non è $\underbrace{\text{"diagonalizzabile su } \mathbb{R}\text{"}}$

$\hookrightarrow$ $\exists M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M$ diagonale

Fatto: invece $\underbrace{\text{su } \mathbb{C}}$ tale A è diagonalizzabile

$\hookrightarrow$ $\exists M \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Prop: dato V sp. vett. di dim. n su $\mathbb{K}$ e $f: V \to V$
se $p_f(t)$ ha radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ distinte
allora f è diagonalizzabile.

Dimo: λ_j radice di $p_f(t) \Rightarrow \lambda_j$ autovalore
$\Rightarrow \exists v_j \neq 0$ t.c. $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j$ (v_j autovettore).

Basta provare che tali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono base, anzi basta provare che sono lin. indip. Provo per induz. finita su $k = 1, \dots, n$ che $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip.

$k = 1$: $v_1 \neq 0$ ok

Supponiamo $v_1, \dots, v_k$ lin. indip. e proviamo che lo sono $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$. Per assurdo, se non lo sono ho $v_{k+1} \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ cioè

$$v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k .$$

Applico f a ↺

$$\underbrace{f(v_{k+1})}_{\lambda_{k+1} \cdot v_{k+1}} = \alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_{\lambda_1 v_1} + \dots + \alpha_k \underbrace{f(v_k)}_{\lambda_k v_k}$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_k \alpha_k v_k$$

$$\underbrace{\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k}_{} = 0$$

comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$ con risultato nullo

Per ipotesi induttiva $\quad \alpha_j \cdot \underbrace{(\lambda_j - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} = 0 \quad j = 1, \dots, k$

$\Longrightarrow \alpha_j = 0 \quad j = 1 \dots k$

$\Longrightarrow v_{k+1} = 0$ Assurdo. $\blacksquare$

$$\boxed{n \text{ autovalori distinti} \Longrightarrow \text{diagonalizzabile}}$$

$\Longleftarrow$ Non è vero

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ diagonale, autoval 1, 7 (autoval 1 doppio).

Che fare se non sono distinti?

Def: se λ è autoval. di f chiamo:

- molteplicità algebrica la molt. di λ come radice di $p_f(t)$
- autospazio di λ $= \{v : f(v) = \lambda v\}$
  $= \{\text{autovett. rel. a } \lambda\} \cup \{0\}$
  $= \operatorname{Ker}(\lambda \cdot id_V - f)$

• molteplicità geometrica la dim. di tale autospazio.

Es: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-5 & 2 \\ -2 & t-1 \end{pmatrix} = t^2 - 6t + 5 + 4$$
$$= t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

A ha il solo autoval. 3 con molt. alg. = 2.

Autospazio: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{matrix} 5x - 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = y \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\longrightarrow$ molt. geom. di 3 è 1.

Prop: se λ è autoval di f allora
$$1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$$

Dim: poniamo $m.g.(\lambda) = k$. Cioè $\exists$ base $v_1, \dots, v_k$ di $\{v : f(v) = \lambda v\}$. Completo a base $\mathcal{B}$ di V:

$k \geq 1$ poiché tale autospazio è $\neq \{0\}$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & X \\ \hline 0 & Y \end{array} \right) \Big\} k$$

$\underbrace{\qquad}_{k}$

$$\Rightarrow p_f(t) = \det\left(t \cdot I_n - \begin{pmatrix} \lambda I_k & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} (t-\lambda) I_k & -X \\ 0 & t \cdot I_{n-k} - Y \end{pmatrix}$$

Esercizio: $\det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p \\ \}q \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{}_{p} & \underbrace{}_{q} \end{matrix} \end{array} = \det(A) \cdot \det(C)$

Attenzione: $\det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p \\ \}p \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{}_{p} & \underbrace{}_{p} \end{matrix} \end{array} = \det(A) \cdot \det(D) - \det(B) \cdot \det(C)$

Falso

$$\Rightarrow p_f(t) = (t-\lambda)^k \cdot p_Y(t)$$

dunque $p_f(t)$ ha la radice λ con molt. almeno k (di più se $p_Y(t)$ ha anch'esso radice λ).

$\boxed{///}$

Teo: sia V uno sp. vett. su $\mathbb{K}$ di dim. n, $f: V \to V$ lin.
Allora f è diagonalizzabile se e solo se:

- $p_f(t)$ ha n radici contate con molt.
- per ciascuna molt. geom. $=$ molt. alg.

sempre vero su $\mathbb{C}$.

Ricetta per vedere se $f: V \to V$ è diago:

(1) prendo $\mathcal{B}$ base di V e trovo $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

(spesso si parte da A)

(2) calcolo $p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$

(3) trovo tutte le radici di $p_A(t)$

(4) se sono su $\mathbb{R}$ e qualcuna non è in $\mathbb{R}$: **No**

(su $\mathbb{C}$ non serve verifica)

(5) se sono n distinte: **Sì**

(6) per ciascuna radice λ con molt. > 1 (m.a.) calcolo la relativa molt. geom.

- se ho sempre m.g. = m.a. **Sì**
- se per qualcuna ho m.g. < m.a. **No**

"dimo Teo"

$\boxed{f \text{ diago} \Longrightarrow n \text{ radici in } \mathbb{K} \text{ con m.g.} = \text{m.a.}}$

ovvio: $\exists\, \mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}}_{m_1} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix}}_{m_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, m_1 \\ \}\, m_2 \\ \\ \end{matrix}$

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

$m_j = m.a.(\lambda_j)$ $\quad$ $autosp(\lambda) = Span(v_1, \dots, v_{m_1})$

$\Rightarrow m.g.(\lambda_1) = m_1$

$\boxed{\text{Viceversa}}$ Come la dimo del caso di autoval. distinti provando che se unisco basi degli autospazi trovo una base di V. "$\boxed{}$"

Oss: Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le radici (ripetute con molt.) di $p_A(t)$ (anche $\lambda_j \in \mathbb{C}$ nel caso di $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$) allora ho $p_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$

$$= t^n - \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{tr(A)} t^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_n}_{det(A)}$$

$\Rightarrow$ la somma delle radici è la traccia
il prodotto è il det.

Ricordo: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è simmetrica se ${}^tA = A$
$M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale se ${}^tM \cdot M = I_n$
ovvero se le colonne di M sono base ortonormale

Teo (spettrale):
A simmetrica $\Longleftrightarrow$ diagonalizzabile tramite matrice ortogonale
cioè: $\exists M$ ortog. t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M$ è diago

cioè: A ammette una base ortonormale di autovettori

“spettrale”: lo spettro che scompone la luce trova gli autovalori di un opportuno operatore simmetrico sulle funzioni d'onda

Dim: ($\Leftarrow$) (poco interessante e facile):

Se A è diago tramite ortog. ho $\exists M$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e

$$M^{-1}\cdot A\cdot M = D \qquad D \text{ diagonale}$$

$$\Rightarrow A = M\cdot D\cdot M^{-1}$$

$$\Rightarrow A = M\cdot D\cdot {}^tM$$

$$\Rightarrow {}^tA = {}^t({}^tM)\cdot {}^tD\cdot {}^tM = M\cdot D\cdot {}^tM$$

$\Rightarrow A$ simm.

($\Rightarrow$) Supponiamo $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simm.

Dimostro per induz. su n che è diagonalizzabile.

(tutti)

Affermo che A ha almeno un autoval. λ reale.

Prendo $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore complesso (radice in $\mathbb{C}$ di $p_A(t)$) e un relativo autovettore $v \in \mathbb{C}^n$ ($v \neq 0$):

$$\langle Av|v\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda v|v\rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda\cdot \cancel{\|v\|^2_{\mathbb{C}^n}}$$

$$\|$$

$$\langle v|A^* v\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle v|Av\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle v|\lambda v\rangle_{\mathbb{C}^n} = \bar{\lambda}\cdot \cancel{\|v\|^2_{\mathbb{C}^n}}$$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Scelgo un autoval $\lambda \in \mathbb{R}$, prendo v autovettore con $\|v\| = 1$ e completo tale v a una base N ortonormale:

dunque ${}^tN = N^{-1}$ e

$$\underbrace{N^{-1}}_{= {}^tN} \cdot A \cdot N = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & y \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} y \in M_{1\times(n-1)} \\ B \in M_{(n-1)\times(n-1)} \end{array}$$

Traspongo:

$${}^tN \cdot \underbrace{{}^tA}_{= A} \cdot N = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \cdots 0 \\ \hline {}^ty & {}^tB \end{array}\right)$$

dunque

$$\begin{pmatrix} \lambda & y \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ {}^ty & {}^tB \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0,\ {}^tB = B$$

dunque $\exists N$ ortog. t.c. ${}^tN \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$B \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ simm.

Per ipotesi induttiva $\exists X \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ ${}^tX = X^{-1}$ t.c. ${}^tX \cdot B \cdot X = D$ diagonale

$$\underbrace{{}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \cdot {}^tN}_{{}^tM = M^{-1}} \cdot A \cdot \underbrace{N \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}}_{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tX \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & {}^tXBX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

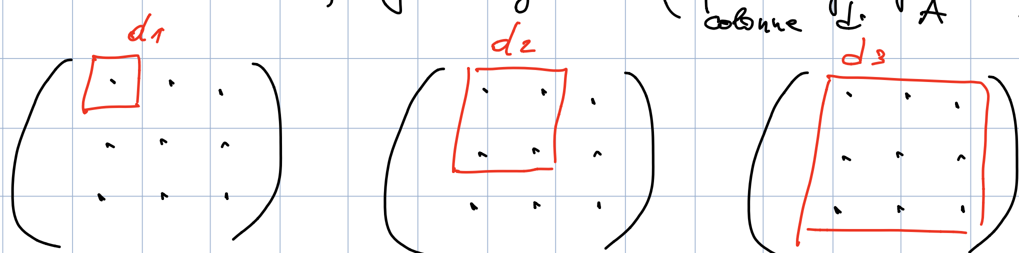
$\blacksquare$

Prop: data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica,
$\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è def. pos $\iff$ A ha tutti gli autoval pos.

Dimo: $\exists M$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e ${}^tM\cdot A\cdot M = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\langle\cdot|\cdot\rangle_A \text{ def pos} &\iff \langle x|x\rangle_A > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \\
&\iff \langle My|My\rangle_A > 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}^n \\
&\iff {}^t(My)\cdot A\cdot My > 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}^n \\
&\iff {}^ty\cdot {}^tM\cdot A\cdot M\cdot y > 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}^n \\
&\iff {}^ty\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} y > 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}^n \\
&\iff \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}^n \\
&\iff \lambda_1,\dots,\lambda_n > 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Data A simm. pongo $d_j = \det\left(\text{sottomatrice delle prime } j \text{ righe e colonne di } A\right)$.



Convenzione: $d_0 = 1$.

Teo: Se $d_1,\dots,d_{n-1} \neq 0$ allora

$$\{\text{segni degli autovalori di } A\} = \left\{\operatorname{sgn}\left(\frac{d_j}{d_{j-1}}\right) : j=1\dots n\right\}.$$

Oss: data A simm. ho

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos. $\Longleftrightarrow$ $d_j > 0$ $\quad j = 1, \dots, n$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 10 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$d_1 = 1 > 0 \qquad d_2 = 10 - 9 > 0$

$d_3 = 20 - 12 - 12 - 160 - 18 - 1 < 0 \Rightarrow$ non è def. pos.

Interpretazione degli autovalori di A simm.

I passo dim teo spettrale: A simm $\Rightarrow$ autoval. reali.

(serve: almeno uno).

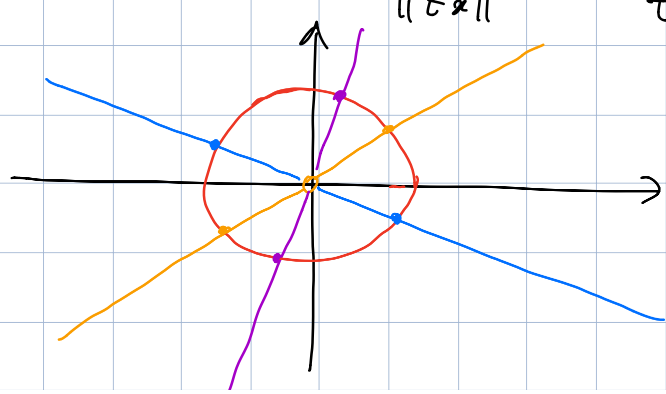
↳ dim alternativa:

Data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simm. considero

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\langle Ax | x \rangle}{\| x \|^2}.$$

Noto: $f(t \cdot x) = \dfrac{\langle A \cdot tx | tx \rangle}{\| tx \|^2} = \dfrac{t^2 \langle Ax | x \rangle}{t^2 \| x \|^2} = f(x).$



i valori assunti da f sono gli stessi assunti sulla sfera unitaria $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Sapete: $f : \underbrace{[a,b]}_{\text{intervallo chiuso e limitato}} \to \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow f$ ha max e min

Fatto: vale analogo in ogni dim. In particolare S^{n-1} è chiuso e limitato.

Conclusione: la mia f ammette max e min.

Sia λ il max o min e $x \in S^{n-1}$ il punto in cui è assunto. So che $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0 \quad j = 1 \dots n$.

$$f(x) = \frac{\langle Ax | x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i,m=1}^{n} a_{im} x_i x_m}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\sum_{i,m=1}^{n} a_{im} \left(\underline{\delta_{ij} x_m} + x_i \delta_{mj} \right) \cdot \cancel{\|x\|^2}^{\,1} - 2x_j \langle Ax | x \rangle}{\cancel{\|x\|^4}_{\,1}}$$

$$= \left(\underbrace{\sum_{m=1}^{n} a_{jm} x_m}_{} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i}_{\text{come l'altro}} \right) - 2x_j \cdot \lambda$$

$$= 2(Ax)_j - 2x_j \cdot \lambda = 0 \qquad j = 1 \dots n$$

$\Rightarrow Ax = \lambda \cdot x$

$\Rightarrow$ il max o min λ di f è autovalore

e il pto in cui è assunto è autovettore di λ.