Esercitazione 15-03-19

9.1.7. (a) Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sia $f: V\times V \to \mathbb{R}$

$f(A,B) = \sum_{i,j=1}^{2} (1+(-2)^{i+j})(AB)_{ij}$. Stabilire se f sia un prodotto scalare.

È bilineare. (Esercizio).

- f non è commutativa. (idea: per la non commutatività del prodotto tra matrici).

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - i = 1,\ j = 2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(A,B) = \sum_{i,j=1}^{2} \left(1 + (-2)^{i+j}\right)(AB)_{ij} = \left(1 + (-2)^{3}\right) \cdot 1 = -7$$

$$f(B,A) = \sum_{i,j=1}^{2} \left(1 + (-2)^{i+j}\right)(BA)_{ij} = 0$$

, quindi $f(A,B) \neq f(B,A)$

9.1.8. Stabilire per quali delle matrici A rassegnate si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è prodotto scalare

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, questi definisce una forma bilineare

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita da $\langle v | w \rangle_A = {}^t v A w$.

- f è simmetrica $\iff$ A è una matrice simmetrica

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{\pi} \\ 5 & 3 & -1781 \\ \sqrt{\pi} & -1781 & e \end{pmatrix}$

$\langle x \cdot e_1 + y e_2 + z \cdot e_3 | x e_1 + y e_2 + z \cdot e_3 \rangle =$

$$x^2 + 10xy + 2\sqrt{\pi}\,xz + 3y^2 - 3562\,yz + e\cdot z^2.$$

$x = 0$

$y = z = 1$

$$\langle e_2+e_3 \mid e_2+e_3\rangle = 3 - 3562 + \underset{\substack{\approx \\ 2{,}7}}{e} < 0$$

Abbiamo esibito

un vettore nonnullo (e_2+e_3) tale che. $\langle e_2+e_3 \mid e_2+e_3\rangle < 0$

$\Rightarrow \langle \cdot \mid \cdot \rangle_A$ non è un prodotto scalare.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. È simmetrica

$$\langle xe_1+ye_2+ze_3 \mid xe_1+ye_2+ze_3\rangle_A =$$

$$= x^2+4xy+5y^2-2yz+3\cdot z^2 =$$

$$(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-2yz+z^2)+2\cdot z^2 =$$

$$(x+2y)^2+(y-z)^2+2\cdot z^2 \geq 0.$$

$$=0 \iff \begin{cases} x+2y=0 \\ y-z=0 \\ z=0 \end{cases} \iff x=y=z=0.$$

$=0 \iff$

$x,y,z=0$

$$\langle v \mid v\rangle_A = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$v=0$$

$$\Downarrow$$

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_A$ e' prodotto scalare.

(g) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. È simmetrica

$\langle xe_1 + ye_2 + ze_3 | xe_1 + ye_2 + ze_3 \rangle_A =$

$5x^2 - 4xy - 6xz + 3y^2 - 4yz + 11z^2 =$

$x^2 + (4x^2 - 4xy + y^2) + 2y^2 - 6xz - 4yz + 11z^2 =$

$(2x-y)^2 + x^2 - 6xz + 11z^2 + 2y^2 - 4yz =$

$(2x-y)^2 + (x^2 - 6xz + 9z^2) + (2z^2 + 2y^2 - 4yz) =$

$(2x-y)^2 + (x-3z)^2 + 2(y-z)^2 \geq 0$

$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0. \Rightarrow \langle \cdot | \cdot \rangle_A$ e' def. positiva

$\Downarrow$

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ e' prodotto scalare.

9.1.9. Data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, definire B, ponendo

$b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot a_{ij}$

Provare che B definisce un prodotto scalare $\Leftrightarrow$ lo fa A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -6 & 1 & -2 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia C definita nel modo seguente:

$$(C)_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i=j \text{ e } i \text{ dispari} \\ -1 \text{ se } i=j \text{ e } i \text{ pari} \end{cases} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

C è simmetrica ($C = {}^tC$)

e invertibile

$C = C^{-1}$

Osserviamo che vale

$B = CAC = {}^tCAC$ (verificare)

Osservazione $B = {}^tB \iff {}^tCAC = {}^t({}^tCAC) = {}^tC\,{}^tA\,C = \iff$

${}^tCAC = {}^tC\,{}^tA\,C \iff C \cdot A \cdot C = C \cdot {}^tA \cdot C \iff A = {}^tA$

$\langle \cdot | \cdot \rangle_B$ è def. positiva $\Leftrightarrow$ $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. positiva.

Supponiamo

$\Leftarrow$ A sia def. positiva, e sia $\underset{}{v} \overset{\neq 0}{\in} \mathbb{R}^n$.

${}^t v B v = {}^t v\, {}^t C A C \cdot v$. Poiché C è invertibile, $C \cdot v = \overset{\mathbb{R}^n \ni}{w} \neq 0$.

$${}^t w A w \underset{\neq}{>} 0 \quad \text{con } w \neq 0 \quad \Rightarrow \forall \underset{\neq 0}{v} \in \mathbb{R}^n \quad {}^t v B v \underset{\neq}{>} 0.$$

$\Downarrow$

$\langle \cdot | \cdot \rangle_B$ è def. positiva.