Geometria 8/3/19

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ prod scal

$v_1, \dots, v_m$ base sttsp. W $\rightsquigarrow$ $u_1, \dots, u_m$ base ortonorm. di W:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad z_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1} | u_i \rangle \cdot u_i \qquad u_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{\|z_{k+1}\|}$$

Oss: $z_{k+1} = v_{k+1}$ + generato da $v_1, \dots, v_k$

$u_{k+1} = z_{k+1} /$ numero pos

$\Rightarrow$ matrice cambio da $v_1, \dots, v_m$ a $u_1, \dots, u_m$ è

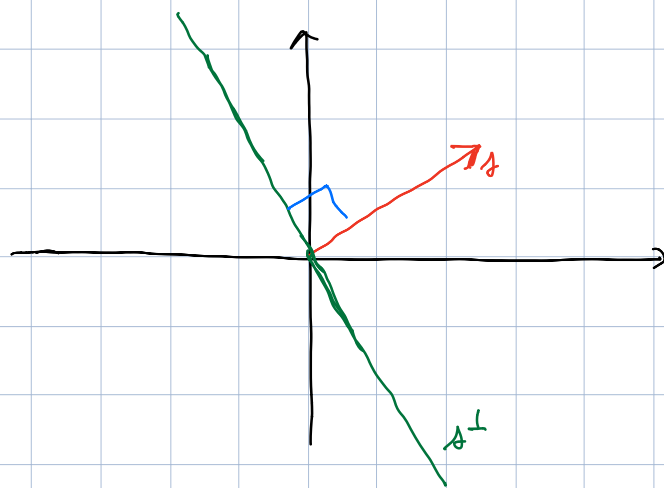
$$\begin{pmatrix} (>0) & * & * & & * \\ 0 & (>0) & * & & \vdots \\ 0 & 0 & (>0) & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ & \vdots & \vdots & & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (>0) \end{pmatrix}$$

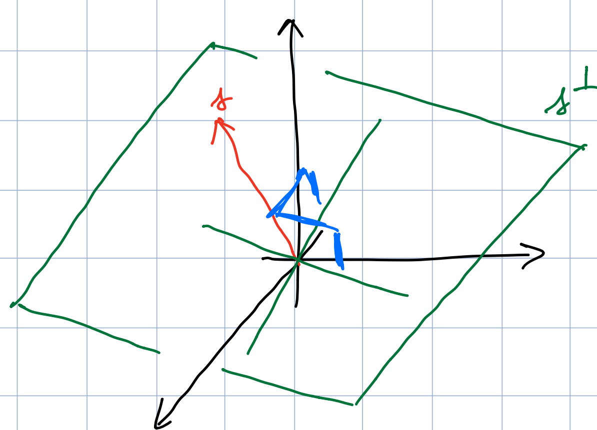
triang. sup. con numeri >0 su diagon.

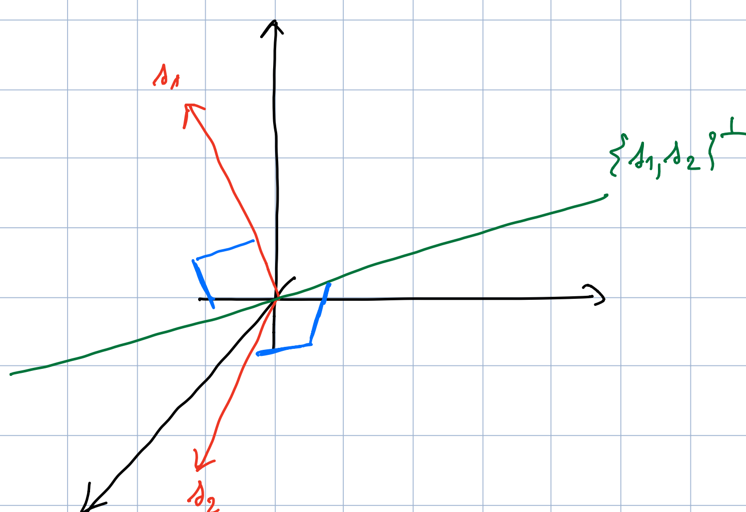
Oss: una base ortog. o ortonorm. di un sttsp. di V, se $\dim_{\mathbb{R}}(V) < +\infty$, si può completare a base ortog. o ortonorm. di V.

- ortonorm: completo a caso e poi ortonormalizzo (i primi m non cambiano)
- ortog.: stesso e poi "denormalizzo" i primi m.

Def: se $S \subset V$ è un sottoinsieme, chiamo
$$S^\perp = \{ v \in V : \langle v | s \rangle = 0 \quad \forall s \in S \}.$$







<u>Oss:</u> 1) $S^\perp$ è sempre un sttsp. vett, infatti

$v_1, v_2 \in S^\perp$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies \langle v_1 | s\rangle = 0$, $\langle v_2 | s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$

$\implies \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 | s \rangle = \alpha_1 \langle v_1 | s \rangle + \alpha_2 \langle v_2 | s \rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \quad \forall s \in S.$

$\implies \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in S^\perp$

2) $S^\perp = (\mathrm{Span}(S))^\perp$, infatti

- $v \in (\mathrm{Span}(S))^\perp \implies v \in S^\perp$ poiché $S \subset \mathrm{Span}(S)$
- $v \in S^\perp$, $w \in \mathrm{Span}(S) \implies w = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$

$\implies \langle v | w \rangle = \langle v | \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k \rangle =$

$= \lambda_1 \underbrace{\langle v | s_1 \rangle}_{0} + \dots + \lambda_k \underbrace{\langle v | s_k \rangle}_{0} = 0$

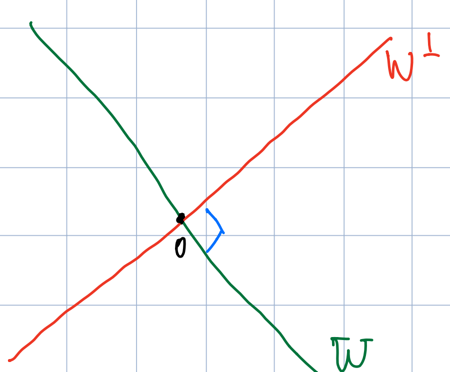
Ho provato che $\langle v | w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathrm{Span}(S) \implies v \in (\mathrm{Span}(S))^\perp$.

<u>Oss:</u> Se W è sttsp. allora $W \cap W^\perp = \{0\}$.

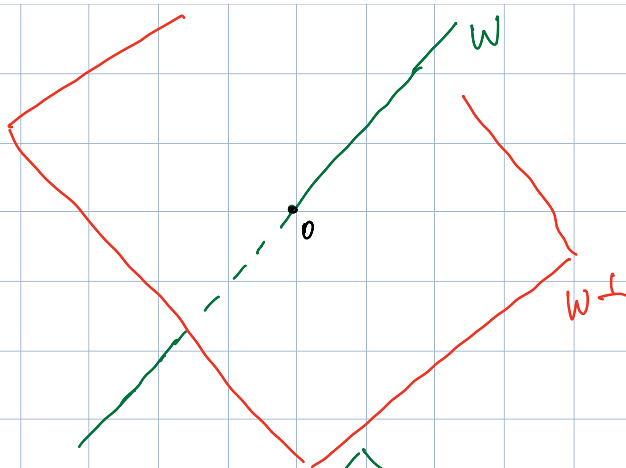
Infatti se $u \in W \cap W^\perp$ ho

$$\|u\|^2 = \langle \underset{W^\perp}{\underset{\cap}{u}} \,|\, \underset{W}{\underset{\cap}{u}} \rangle = 0 \implies u = 0.$$

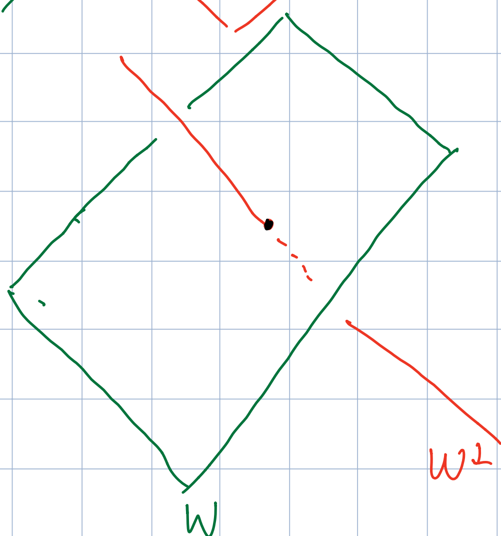
Nel caso di $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$:



$\implies \mathbb{R}^2 = W \oplus W^\perp$



$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$



$\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$

Attenzione: se V ha dim *infinita* allora può non essere vero che $W + W^\perp = V$.

Es: $V = C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$; $\langle x | y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cdot y(t)\, dt$

$s_k(t) = \sin(kt)$ $c_k(t) = \cos(kt)$

$W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} s_k & k = 1, 2, \dots \\ c_k & k = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$

Fatto: $W^\perp = \{0\}$; però $W \neq V$

cioè se $\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin(kt)\,dt = 0$
$\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos(kt)\,dt = 0$ $\quad \forall k$

$\Rightarrow x = 0$

non è vero che ogni funzione continua su $[-\pi,\pi]$ è comb. lin. s_k e c_k.

Prop: se $\dim(V) < +\infty$ e W è stop allora
$$V = W \oplus W^\perp \quad e \quad (W^\perp)^\perp = W.$$

Dim: prendo una base di W $\;w_1, \dots, w_m$ ortonormale
completo aggiungendo $u_{m+1}, \dots, u_n$ a base ortonormale di V.

Affermo che $W^\perp = \mathrm{Span}(u_{m+1}, \dots, u_n)$.

Infatti se $x \in W^\perp$ ho $x = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m + \beta_{m+1} u_{m+1} + \dots + \beta_n u_n$

(poiché $w_1, \dots u_{m+1} \dots$ sono base); ma

$$\underbrace{\langle x | w_i \rangle}_{=0} = \langle \alpha_1 w_1 + \dots + \beta_{m+1} u_{m+1} \dots | w_i \rangle = \alpha_i \quad i = 1 \dots m$$

$\Rightarrow x = \beta_{m+1} u_{m+1} + \dots + \beta_n u_n$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Span}(u_{m+1}, \dots, u_n)$.

Viceversa se $x \in \mathrm{Span}(u_{m+1}, \dots, u_n)$

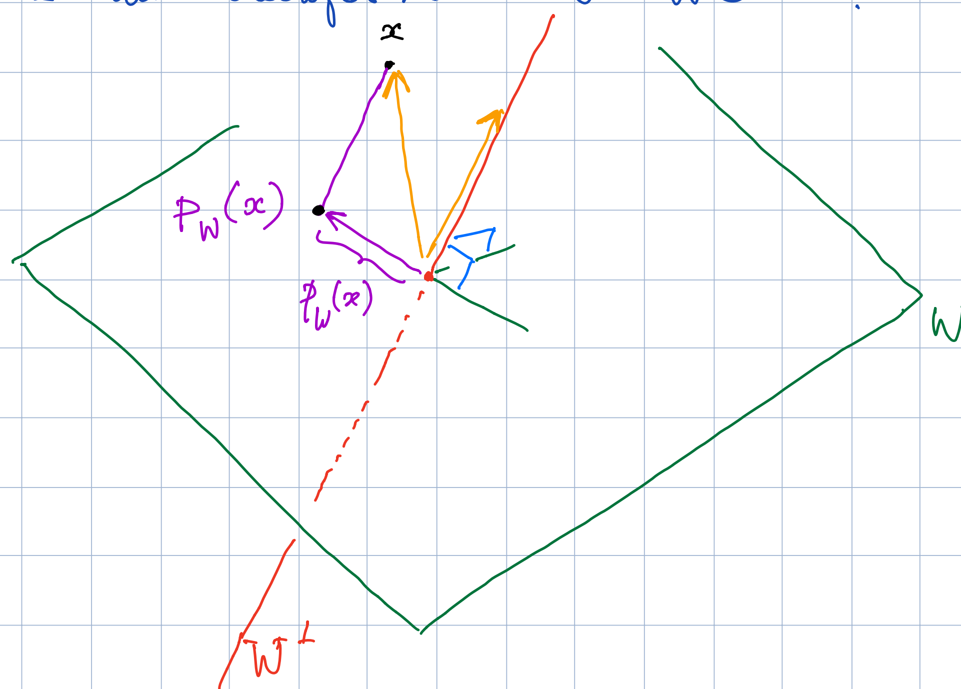
$\Rightarrow x = \beta_{m+1} u_{m+1} + \dots + \beta_n u_n$

$\Rightarrow \langle x | w_i \rangle = 0 \quad i = 1 \dots m$.

$(W^\perp)^\perp = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_m)$ (stesso argomento)

$\Rightarrow (W^\perp)^\perp = W.$ ☐

Def: dato V con $\langle\cdot|\cdot\rangle$ e $\dim(V) < +\infty$, $W \subset V$ stsp chiamo proiezione ortogonale su W la proiez. su W relativa alla decomposizione $V = W \oplus W^\perp$.

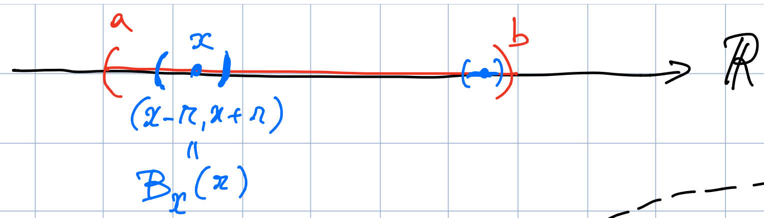


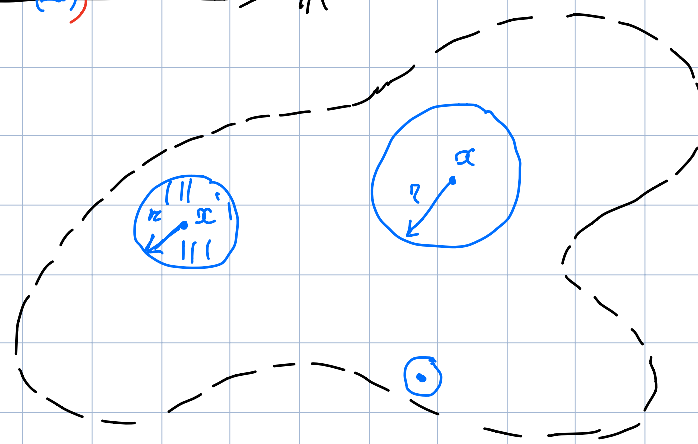
Cenni di calcolo differenziale in più variabili

Def: chiamo aperto un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $\forall x \in A \ \exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subset A$

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

palla di centro x e raggio r.





Cioè: A è aperto se dovunque mi metto in A posso spostarmi almeno di poco in ogni direzione.