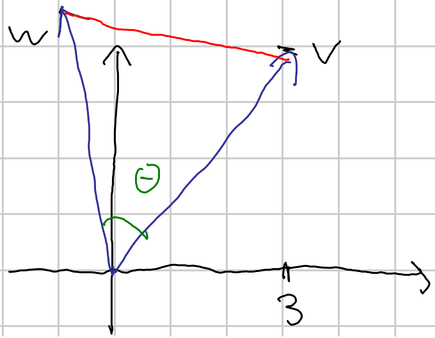
Esercitazione 07/03/2019

Ricevimento Martedì ore 16:30

S.0.1. Calcolare la distanza tra i vettori v e w assegnati nello spazio $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare $\langle x | y \rangle = {}^t x \cdot y$, nonché l'angolo da essi formato.

(a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$



La distanza fra v e w è definita come la norma della differenza fra v e w.

$$d(v,w) = \|v-w\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\langle v-w | v-w \rangle}$$

$$v-w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \langle v-w | v-w \rangle = (4 \quad -1)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 16+1 = 17$$

$$d(v,w) = \sqrt{17}$$

- θ angolo fra v e w

$$\cos\theta = \frac{\langle v | w \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|v\|_{\mathbb{R}^2} \cdot \|w\|_{\mathbb{R}^2}}$$

$$\langle v | w \rangle_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -3 + 20 = 17$$

$$\| v \|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\langle v | v \rangle} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\| w \|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\langle w | w \rangle} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$\cos\Theta = \frac{17}{5 \cdot \sqrt{26}} \Rightarrow \Theta = \arccos\left(\frac{17}{5 \cdot \sqrt{26}} \right)$$

$$\wr$$

$$0 < \frac{17}{25} < 1$$

(C) $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v - w = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$ $d(v, w) = \sqrt{\langle v-w | v-w \rangle} = \sqrt{9+81+16} = \sqrt{106}$

$\cos\theta = \dfrac{\langle v | w \rangle}{\|v\|_{\mathbb{R}^2} \cdot \|w\|_{\mathbb{R}^2}}$. $\langle v | w \rangle = (8 \ 7 \ -1) \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 40 - 14 - 3 = 23$

$\|v\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{64+49+1} = \sqrt{114}$, $\|w\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$

$\cos\theta = \dfrac{23}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{114}} \in (0, 1)$ $\theta = \arccos\left(\dfrac{23}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{114}}\right)$

d) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

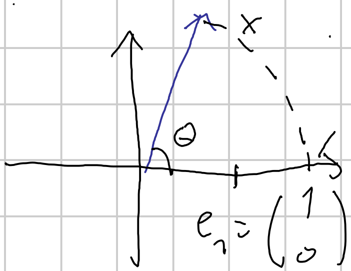
$v - w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $d(v, w) = \sqrt{\langle v-w | v-w \rangle} = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$

$\langle v | w \rangle = (2 \quad 3 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2+9-2+2 = 7$

$\|v\| = \sqrt{4+9+1+1} = \sqrt{15}$, $\|w\| = \sqrt{1+9+4+4} = \sqrt{18}$.

$$\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{18}} \in (0,1) \qquad \theta = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{18}}\right).$$

9.0.2. Dato $x \in \mathbb{R}^2$ non nullo, esibire l'unica coppia (λ, θ) tale che la rotazione di angolo θ composta con l'omotetia di ragione λ trasforma x in $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Dedurre che due vettori $x, y \in \mathbb{R}^2$ non nulli sono ortogonali tra loro se e solo se $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$.



$x' = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$, con $\alpha > 0$

Rotazione di angolo θ è $f_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Omotetia di ragione λ è $f_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{\langle x | e_1 \rangle}{\|x\| \cdot \|e_1\|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad \theta = \pm \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right).$$

- Se $x_2 < 0$ $\theta = \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$ - rotazione in senso orario
- Se $x_2 > 0$ $\theta = -\arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$ - senso antiorario
- Se $x_2 = 0$, $x_1 > 0$ $\theta = 0$
- Se $x_2 = 0$, $x_1 < 0$ $\theta = \pi$

λ parametro dell'omotetia: $\lambda = \frac{1}{\|x\|_{\mathbb{R}^2}}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ $\lambda = \frac{1}{\|x\|_{\mathbb{R}^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{pmatrix}$ $\sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} = \lambda \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle} = \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = 1$

- x e' ortogonale a $e_1 \iff x_1 = 0 \iff \langle x, e_1 \rangle = 0$

- x e y non nulli: Applichiamo rotazione + omotetia $\exists f$

in modo che $f(y) = e_1$, $f(x)$ è ortogonale a $e_1 \Leftrightarrow$

$\langle f(x), e_1 \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = 0$

- Notiamo che x e y sono ortogonali $\Leftrightarrow$ $f(x)$ e $f(y)$ sono ortogonali.

- $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$

verificare che è vero sia per f omotetia sia per f rotazione

9.1.1. Verificare che per lo spazio vettoriale V assegnato la funzione $f: V \times V \to \mathbb{R}$ data è un prodotto scalare.

a) $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t]$

$$f(p(t), q(t)) = 5\big(p(1) - 2 \cdot p(-2)\big) \cdot \big(q(1) - 2\, q(-2)\big) +$$
$$+ 3\big(p(2) - 7\, p(-1)\big) \cdot \big(q(2) - 7 \cdot q(-1)\big).$$

• Bilinearità: Bisogna verificare che vale:

$$f((\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2)(t), q(t)) = \alpha \cdot f(p_1(t), q(t)) + \beta \cdot f(p_2(t), q(t)).$$
$$f(p(t), (\alpha q_1 + \beta q_2)(t)) = \alpha \cdot f(p(t), q_1(t)) + \beta \cdot f(p(t), q_2(t)).$$

• Usare che: $\forall\ r \in \mathbb{R}$ vale $(\alpha p_1 + \beta p_2)(r) = \alpha \cdot p_1(r) + \beta \cdot p_2(r)$

• $f((\alpha p_1 + \beta p_2)(t), q(t)) = 5\left(\left(\alpha p_1(1) + \beta p_2(1)\right) - 2\cdot(\alpha p_1(-2) + \beta p_2(-2))\right)$
$\left(q(1) - 2\cdot q(-2)\right) + 3\left((\alpha p_1(2) - \beta\cdot p_2(2)) - 7(\alpha p_1(-1) + \beta\cdot p_2(-1))\right)\cdot$
$\left(q(2) - 7\cdot q(-1)\right) =$

$\alpha\left[5\cdot\left(p_1(1) - 2\,p_1(-2)\right)\cdot\left(q(1) - 2q(-2)\right) + 3\left(p_1(2) - 7p_1(-1)\right)\left(q(2) - 7\cdot q(-1)\right)\right]$

$+\beta\left[5\left(p_2(1) - 2p_2(-2)\right)\cdot\left(q(1) - 2\cdot q(-2)\right) + 3\left(p_2(2) - 7p_2(-1)\right)\cdot\left(q(2) - 7\cdot q(-1)\right)\right] =$

$= \alpha\cdot f(p_1(t), q(t)) + \beta\cdot f(p_2(t), q(t))$

- Simmetrica: ovvio dalla definizione + commutatività di · su $\mathbb{R}$.

- f è definita positiva.

Dobbiamo verificare che se $p(t) \neq 0$, allora $f(p(t), p(t)) \underset{\neq}{\geq} 0$ $\forall$

$f(p(t), p(t)) = 5\,(p(1) - 2p(-2)) \cdot (p(1) - 2p(-2)) + 3(p(2) - 7p(-1)) \cdot (p(2) - 7 \cdot p(-1)) = \underbrace{5}_{>0} \cdot \underbrace{(p(1) - 2p(-2))^2}_{\geq 0} + \underbrace{3}_{>0} \cdot \underbrace{(p(2) - 7 \cdot (p(-1))^2}_{\geq 0} - *$

Dobbiamo verificare che se $p(t) \neq 0$, allora $*$ è $\underset{\neq}{\geq} 0$

Supponiamo per assurdo che esista $p(t) = at+b$ con a e b non entrambi nulli che annulla $*$.

Se ciò accade, allora $p(1) - 2p(-2) = 0$ e $p(2) - 7p(-1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a - b = 0 \\ 9a - 6b = 0 \end{cases} \quad \text{— unica soluzione} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix} \Rightarrow p(t) = 0 \text{ assurdo.}$$

sostituendo $p(t) = at+b$

$\Rightarrow f$ è definita positiva.

(c) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

$$f(x,y) = -x_2 y_1 - 2x_3 y_1 - 3x_1 y_3 + 5x_1 y_2 + 5x_3 y_2.$$

• Bilinearità: facile

• Simmetria. Verifichiamo che $f(x,y) = f(y,x)$

Prendiamo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in V$.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = -(x_1 + x_3) \cdot y_1 - 2x_3 y_1 - 3x_1 y_1 - 3x_1 y_3 + 5x_1 (y_1 + y_3) + 5x_3 (y_1 + y_3) = \boxed{x_1 y_1 + 2x_3 y_1 + 2x_1 y_3 + 5x_3 y_3}.$$

Similmente

$f(y,x) = y_1 x_1 + 2y_3 x_1 + 2y_1 x_3 + 5 y_3 x_3$

f è simmetrica su V (Non su tutto $\mathbb{R}^3$).

- f definita positiva.

Sia $\underset{V}{\overset{\uparrow}{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ non nullo $(x_1 \neq 0 \vee x_3 \neq 0)$.

$f(x,x) = x_1^2 + 4(x_1 x_3) + 5 \cdot x_3^2 =$ - vogliamo verificare che è ≥ 0, e $= 0 \Leftrightarrow x_1 = x_3 = 0$

$= x_1^2 + 4(x_1 x_3) + 4 \cdot x_3^2 + x_3^2 =$

$$= (x_1 + 2x_3)^2 + x_3^2 \geq 0.$$

$$(x_1+2x_3)^2 + x_3^2 = 0 \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_3 = 0$$

Quindi f e' def. positiva.