UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 26/6/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dire per quali t è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} t^2+2t-4 & 2-t \\ 2(t^2+t-6) & 6-t \end{pmatrix}$.

2. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ calcolare $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -5$, che $\det(A) = 4$ e che $p_A(2) = 30$.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ ortogonali a $\begin{pmatrix} 4-i \\ 1+i \end{pmatrix}$, con somma delle coordinate reale e unitarî.

4. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ le matrici $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 7 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ sono coniugate tra loro.

5. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della conica $tx^2 + 4xy + 3y^2 - \frac{8}{3}x - 2y - 1 = 0$.

6. Se $U, V \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono sottospazî proiettivi distinti di dimensione 2, cosa può essere $U \cap V$?

7. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ è esatta la forma $x^2 y \sin(7x^3y^2)\,(y\,\mathrm{d}x + kx\,\mathrm{d}y)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 26/6/18 — Esercizî

1. In uno spazio vettoriale X reale di dimensione finita e dotato di un prodotto scalare, considerare due sottospazî vettoriali Y_1, Y_2 e le proiezioni ortogonali f_1, f_2 su di essi. Porre $f = f_1 + f_2$.

(A) (4 punti) Provare che f è sempre autoaggiunta.

(B) (4 punti) Provare che se Y_1 e Y_2 sono ortogonali tra loro allora f è la proiezione ortogonale su $Y_1 + Y_2$.

(C) (4 punti) Dire se esistono altri casi nei quali f è una proiezione ortogonale. [Aiuto: eventualmente limitarsi al caso in cui $X = \mathbb{R}^2$ e Y_1, Y_2 sono rette.]

2. Considerare la curva $\alpha : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 3s^2 - 2s \\ s + \sin(s) \\ \ln(1-s) - s \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (2 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di α a $[-\pi, 0]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. $t \neq -1$

2. $p_A(t) = t^3 + 5t^2 + 3t - 4$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{247}}\begin{pmatrix} -1+5i \\ 14-5i \end{pmatrix}$

4. $\alpha = \pm\sqrt{78}$

5. Due rette incidenti per $t = 1$, iperbole per $t < \frac{4}{3}$ con $t \neq 1$, parabola per $t = \frac{4}{3}$, ellisse per $t > \frac{4}{3}$

6. Sempre un sottospazio proiettivo di dimensione 1

7. $k = \frac{2}{3}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) f_1 e f_2 sono autoaggiunte, e la somma di due applicazioni autoaggiunte lo è

(B) Se Y_1 e Y_2 sono ortogonali fra loro poniamo $V = (Y_1+Y_2)^\perp$. Poiché $Y_2+V \subset Y_1^\perp$ e $Y_1+V \subset Y_2^\perp$, dati $y_1 \in Y_1,\ y_2 \in Y_2,\ v \in V$ abbiamo

$$f_1(y_1) = y_1, \quad f_1(y_2) = 0, \quad f_1(v) = 0, \quad f_2(y_1) = 0, \quad f_2(y_2) = y_2, \quad f_2(v) = 0$$

dunque $(f_1 + f_2)(y_1 + y_2 + v) = y_1 + y_2$, che è quello che dovevamo dimostrare.

(C) No. Se Y_1 e Y_2 sono rette non ortogonali nel piano, a meno di rotazioni possiamo supporre che siano generate da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$, ma allora $(f_1 + f_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\cos^2(\vartheta) \\ \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ ha norma $1 + 3\cos^2(\vartheta) > 1$, assurdo.

In generale, supponiamo ch $f_1, f_2, f_1 + f_2$ siano proiezioni; allora

$$0 = (f_1 + f_2) - f_1 - f_2 = (f_1 + f_2) \circ (f_1 + f_2) - f_1 \circ f_1 - f_2 \circ f_2 = f_1 \circ f_2 + f_2 \circ f_1.$$

Se $y_1 \in Y_1$ abbiamo ora $f_1(f_2(y_1)) = -f_2(f_1(y_1)) = -f_2(y_1)$, ma l'unico vettore che una proiezione ortogonale mandi in meno sé stesso è quello nullo, dunque $f_2(y_1) = 0$. Abbiamo provato che $Y_1 \subset Y_2^\perp$, come voluto.

2.

(A) La seconda componente ha derivata non negativa e nulla solo in punti isolati, dunque è strettamente crescente. La terza componente ha derivata nulla solo in $s = 2$, dove le altre non si annullano.

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{258}}\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix},\ b = -\frac{1}{\sqrt{86}}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{\sqrt{86}}{12\sqrt{3}},\ \tau = \frac{19}{172}$

(D) $2\pi^3 + \pi^2 + 6\pi + 4$

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\heartsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$
