UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 5/6/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ⌴⌴⌴⌴⌴⌴

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. Esibire le $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ che rappresentano isometrie del piano e hanno traccia 1.

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[t-1:3:1]$ e $[4:2t+1:-3]$ contiene il punto $[-2:1:5]$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica $y^2 + 6z^2 + 10xz - 4yz + 4x + 6y + 2 = 0$. Spiegare.

5. Calcolare la curvatura con segno nel punto $t = 0$ della curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - \ln(1+2t) \\ \mathrm{e}^{t-3t^2} \end{pmatrix}$.

6. Calcolare $\int_\alpha \frac{-(y+1)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+(y+1)^2}$ con $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ -4t^2 \end{pmatrix}$.

7. Calcolare $\int_\alpha (3y\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ t + 3t^2 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 5/6/18 — Esercizî

1. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} iz & (i-2)z-5 \\ (1+z)^2 & 13 \end{pmatrix}$.

(A) (5 punti) Dire per quali $z \in \mathbb{C}$ la A ha autovalori reali ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di A.

(B) (2 punti) Per l'unico valore di z trovato nel punto (A) per il quale $\langle\cdot|\cdot\rangle$ **non è** un prodotto scalare, trovare i segni degli autovalori di A.

(C) (5 punti) Per l'unico valore di z trovato nel punto (A) per il quale $\langle\cdot|\cdot\rangle$ **è** un prodotto scalare, ortonormalizzare la base $(e_1 + ie_2,\ ie_1 + 2e_2)$ di $\mathbb{C}^2$ rispetto a esso.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} k^2-4k+3 & 7k-4 & 4k-1 \\ 2k^2-3k & 6k-2k^2 & 3k-2k^2 \\ -3k^2-k+2 & 4k^2+k-3 & 4k^2+k \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Verificare che $\det(A) = 6k^5 + 15k^3 + 6k$.

(B) (2 punti) Sapendo che $p_A(1) = -6k^5 + 2k^4 - 6k^3 + 2k^2$ determinare $p_A(t)$.

(C) (2 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $2k^2 + 1$, trovare gli altri due.

(D) (2 punti) Al variare di k determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di A.

(E) (4 punti) Al variare di k determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A, deducendone la diagonalizzabilità o meno di A.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 5/6/18 — Quesiti

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -3;\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mp\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

3. $t = 2$ e $t = -\frac{11}{5}$

4. Iperboloide iperbolico (a una falda)

5. $\frac{4}{25}\sqrt{5}$

6. 2π

7. $-\frac{149}{30}$

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) $z = -2i,\ z = 3i$

(B) $z = 3i$; discordi

(C) $z = -2i$; $\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 3+9i \\ -2+3i \end{pmatrix}$

2.

(A) Sostituire dapprima la terza colonna con sé stessa meno la seconda, poi la prima riga con sé stessa meno la seconda meno la terza, quindi la seconda riga con sé stessa meno k volte la terza, e infine la seconda colonna con sé stessa meno la prima, trovando $3k(k^2+2)(2k^2+1) = 6k^5+15k^3+6k$

(B) $p_A(t) = t^3 - 3(k^2+k+1)t^2 + (2k^4+9k^3+5k^2+9k+2)t - (6k^5+15k^3+6k)$

(C) $3k$ e k^2+2

(D) $k=1$: m.a.$(3) = 3$
$k=2$: m.a.$(6) = 2$, m.a.$(9) = 1$
$k=-1$: m.a.$(3) = 2$, m.a.$(-3) = 1$
$k=\frac{1}{2}$: m.a.$(\frac{3}{2}) = 2$, m.a.$(\frac{9}{4}) = 1$
altrimenti: m.a.$(3k) =$ m.a.$(k^2+2) =$ m.a.$(2k^2+1) = 1$

(E) $k=1$: m.g.$(3) = 2$; non diagonalizzabile
$k=2$: m.g.$(6) = 1$, m.g.$(9) = 1$; non diagonalizzabile
$k=-1$: m.g.$(3) = 2$, m.g.$(-3) = 1$; diagonalizzabile
$k=\frac{1}{2}$: m.g.$(\frac{3}{2}) = 1$, m.g.$(\frac{9}{4}) = 1$; non diagonalizzabile
altrimenti: m.g.$(3k) =$ m.g.$(k^2+2) =$ m.g.$(2k^2+1) = 1$; diagonalizzabile