



1. Dati 15 vettori che generano $\{z \in \mathbb{C}^9 : (1 - i)z_2 + (3 + 2i)z_8 = 0\}$, quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

2. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_2 + 9x_4 = 0\}$ e $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow X$ è lineare e surgettiva, che dimensione può avere un sottospazio Y di \mathbb{R}^9 tale che $Y + \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^9$?

3. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 26x_1 - 19x_2\}$, la base $\mathcal{B} = (3e_1 + 4e_2 + 2e_3, 5e_1 + 7e_2 - 3e_3)$ di X e $f : X \rightarrow X$ con $f(x) = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -1 \\ 13 & -10 & -2 \\ -13 & 9 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}$.

4. Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(e_1 - 2e_2) = e_1 + 3e_3$, $f(2e_1 + 3e_2) = -e_1 + 4e_2$ trovare $f^{-1}(-3e_1 + 5e_2)$.

5. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Risolvere $2z^2 - 7z = 10i - 11$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0\}$ e $Y = \text{Span}(e_1 + e_2 + e_3)$, calcolare la proiezione di $-e_1 + e_2 + e_3$ su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.



1. In \mathbb{R}^4 considerare $X = \text{Span} \left(\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \right)$ e $x = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 34 \\ 31 \end{pmatrix}$.

- (A) (4 punti) Provare che i vettori assegnati come generatori sono una base \mathcal{B} di X , deducendone la sua dimensione.
- (B) (4 punti) Provare che x appartiene a X e trovare $[x]_{\mathcal{B}}$.
- (C) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di X .

2. Considerare il sistema lineare
$$\begin{cases} -5x + 6y + 2z = t - 2 \\ (1 + t)x + 7y - z = 2 \\ -6x + (7t - 2)y + 3z = 4. \end{cases}$$

- (A) (4 punti) Risolverlo per $t = 0$.
- (B) (4 punti) Trovare t_1, t_2 tali che il sistema è impossibile per $t = t_1$, ha infinite soluzioni per $t = t_2$, ne ha una sola altrimenti.
- (C) (4 punti) Per $t = t_2$ provare che se Y è la giacitura dell'insieme delle soluzioni e X è il sottospazio di equazione $3x + y - z = 0$ si ha $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$, esibendo la matrice della proiezione su X associata a questa decomposizione in somma diretta.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



Risposte ai quesiti

5. ♥

1. 7

2. Tra 3 e 9 compresi

3. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 4. $3e_1 + 8e_2$ 5. -4 e -32 6. $z_1 = \frac{1}{2} - 2i$, $z_2 = 3 + 2i$ 7. $-2(2e_1 + e_2 + e_3)$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



Soluzioni degli esercizi

5. ♡

1.

(A) Sono linearmente indipendenti; dimensione 3

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(C) $39x_1 + 85x_2 - 5x_3 - 28x_4 = 0$

2.

(A) $x = -54, y = -8, z = -112$

(B) $t_1 = \frac{1}{14}, t_2 = 3$

(C) Y è generato da $20e_1 - 3e_2 + 59e_3$, che non soddisfa l'equazione di X . La matrice è $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 62 & -20 & 20 \\ -9 & -1 & 3 \\ 177 & 59 & -57 \end{pmatrix}$