UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 5/6/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in $\{z \in \mathbb{C}^9 : \ (1-i)z_2 + (3+2i)z_8 = 0\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

2. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^8 : \ 2x_3 + 9x_7 = 0\}$ e $f : \mathbb{R}^5 \to X$ è lineare e ha nucleo di dimensione 2, che dimensione può avere un sottospazio Y di X tale che $Y \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$?

3. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = 26x_1 - 19x_2\}$, la base $\mathcal{B} = (3e_1 + 4e_2 + 2e_3, \ 5e_1 + 7e_2 - 3e_3)$ di X e $f : X \to X$ con $f(x) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

4. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(e_1 - 2e_2) = e_1 + 3e_3, \ f(2e_1 + 3e_2) = -e_1 + 4e_2$ trovare $f^{-1}(3e_1 + 2e_2)$.

5. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Risolvere $2z^2 + 5z = 1 - 7i$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 + e_3)$, calcolare la proiezione di $2e_1 + e_2 + e_3$ su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 5/6/18 — Esercizî

1. Considerare il sistema lineare $\begin{cases} -5x + 6y + 2z = t - 2 \\ (1+t)x + 7y - z = 2 \\ -6x + (7t-2)y + 3z = 4. \end{cases}$

(A) (4 punti) Risolverlo per $t = 0$.

(B) (4 punti) Trovare t_1, t_2 tali che il sistema è impossibile per $t = t_1$, ha infinite soluzioni per $t = t_2$, ne ha una sola altrimenti.

(C) (4 punti) Per $t = t_2$ provare che se Y è la giacitura dell'insieme delle soluzioni e X è il sottospazio di equazione $3x+y-z = 0$ si ha $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$, esibendo la matrice della proiezione su X associata a questa decomposizione in somma diretta.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare $X = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$ e $x = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 34 \\ 31 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Provare che i vettori assegnati come generatori sono una base $\mathcal{B}$ di X, deducendone la sua dimensione.

(B) (4 punti) Provare che x appartiene a X e trovare $[x]_{\mathcal{B}}$.

(C) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di X.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 5/6/18 — Quesiti

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. 5

2. Tra 0 e 4 compresi.

3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $-7e_2$

5. -5 e -30

6. $z_1 = \frac{1}{2} - i,\ z_2 = i - 3$

7. $-(e_1 + 2e_2 + 2e_3)$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) $x = -54,\ y = -8,\ z = -112$

(B) $t_1 = \frac{1}{14},\ t_2 = 3$

(C) Y è generato da $20e_1 - 3e_2 + 59e_3$, che non soddisfa l'equazione di X. La matrice è $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 62 & -20 & 20 \\ -9 & -1 & 3 \\ 177 & 59 & -57 \end{pmatrix}$

2.

(A) Sono linearmente indipendenti; dimensione 3

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(C) $39x_1 + 85x_2 - 5x_3 - 28x_4 = 0$