



Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Se  $X = \{x \in \mathbb{R}^6 : x_2 = 7x_1 + 2x_6\}$  e  $f : X \rightarrow X$  è lineare e ha 4 autovalori distinti, si può concludere che è diagonalizzabile? Spiegare.
  
2. Trovare tutti i vettori di  $\mathbb{C}^2$  unitari, con seconda coordinata immaginaria pura e ortogonali a  $(2 - i)e_1 + (3 + 2i)e_2$ .
  
3. Determinare il punto di intersezione in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  della retta passante per i punti  $[1 : 4 : -2]$  e  $[3 : -1 : 1]$  con quella di equazione  $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ .
  
4. Stabilire per quali  $k \in \mathbb{R}$  la conica  $x^2 + 2kxy + 2y^2 + 6x - 6\sqrt{2}y - 1 = 0$  sia una parabola.
  
5. Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  determinare il tipo affine della quadrica  $(k - 1)x^2 - y^2 + kz^2 - 2x + 2z = 0$ .
  
6. Determinare la matrice hessiana nel punto  $(0, 0)$  della funzione  $f(x, y) = x^2 + 3xy - 4y^2 + e^{5x-2y}$  e i segni dei suoi autovalori.
  
7. Calcolare  $\int_{\alpha} (x^2 dy - 2y dx)$  con  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3 - t \\ t^2 \end{pmatrix}$ .

---

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇

---



1. Considerare la curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t e^{-2t} \\ t + t^2 \end{pmatrix}$ .
- (A) (1 punto) Provare che  $\alpha$  è regolare.
- (B) (3 punti) Calcolare la curvatura di  $\alpha$  nel punto  $t = 0$ .
- (C) (3 punti) Al variare di  $t$  determinare il segno della curvatura di  $\alpha$  nel punto  $t$ .
- (D) (3 punti) Calcolare  $\int_{\beta} x \, dy$  dove  $\beta$  è la restrizione di  $\alpha$  a  $[0, 1]$ .
- (E) (2 punti) Provare che  $\alpha$  è semplice. [La risposta a questa domanda è abbastanza difficile.]
2. Al variare di  $z \in \mathbb{C}$  considerare le matrici  $A_z = \begin{pmatrix} 4+i & 2-i \\ 2+i & -3+iz \end{pmatrix}$  e  $B_z = \frac{1}{2}(A_z + A_z^*)$ .
- (A) (4 punti) Verificare che l'unico valore reale di  $z$  per cui esiste una base ortonormale di  $\mathbb{C}^2$  costituita da autovettori di  $A_z$  è  $z = 1$ .
- (B) (3 punti) Calcolare gli autovalori di  $A_1$  (ovvero di  $A_z$  per  $z = 1$ ).
- (C) (2 punti) Verificare che esiste sempre una base ortonormale di  $\mathbb{C}^2$  costituita da autovettori di  $B_z$ .
- (D) (3 punti) Calcolare gli autovalori di  $B_{-2i}$  (ovvero di  $B_z$  per  $z = -2i$ ) e una base ortogonale che la diagonalizza.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



## Risposte ai quesiti

5. ♥

1. No, uno degli autovalori ha molteplicità algebrica 2 ma può avere molteplicità geometrica 1
2.  $\pm \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 7 + 4i \\ -5i \end{pmatrix}$
3.  $[1 : -9 : 5]$
4.  $k = \sqrt{2}$
5. Ellissoide per  $k < 0$ ; paraboloidi ellittici per  $k = 0$ ; iperboloidi ellittici per  $0 < k < \frac{1}{2}$ ; degeneri per  $k = \frac{1}{2}$ ; iperboloidi iperbolici per  $\frac{1}{2} < k < 1$  e per  $k > 1$ ; paraboloidi iperbolici per  $k = 1$
6.  $\begin{pmatrix} 27 & -7 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$ ; discordi
7.  $\frac{37}{6}$

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦

---



## Soluzioni degli esercizi

## 5. ♡

1.

- (A) La seconda componente di  $a'(t)$  si annulla solo per  $t = -\frac{1}{2}$ , ma per tale valore non si annulla la prima
- (B)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$
- (C) Uguale a quello di  $\frac{1}{2}\sqrt{3} - |t|$
- (D)  $\frac{1}{4}(3 - 13e^{-2})$
- (E) Posto  $\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , si ha  $Y(s) = Y(t)$  solo per  $s = t$  o per  $s = -t - 1$ ; ora  $X(-t - 1) = X(t)$  solo se  $f(t) = t + (t + 1)e^{4t+2}$  si annulla. Inoltre  $f$  si annulla in  $t = -\frac{1}{2}$ , ma in tal caso  $-t - 1 = t$ ; però  $f''(t) = 8(2t + 3)e^{4t+5}$  si annulla solo in  $t = -\frac{3}{2}$ , dunque  $f'(t)$  ha un unico minimo in  $t = -\frac{3}{2}$ , che vale  $1 - \frac{1}{6} > 0$ ; ne segue che  $f'$  è sempre positiva, dunque  $f$  è crescente, pertanto si annulla solo in  $t = -\frac{1}{2}$ , e la conclusione segue

2.

- (A)  $A_z$  è normale solo per  $z = 1$
- (B)  $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{69}) + i$
- (C)  $B_z$  è sempre hermitiana
- (D)  $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ ;  $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 5 \pm 3\sqrt{5} \\ 4 + 2i \end{pmatrix}$