



- Per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 4k^2 - 3k + 1 & -4k^2 + 6k - 2 \\ 2k^2 - 2k & 4k - 2k^2 \end{pmatrix}$?
- Data $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ determinare $p_A(t)$ sapendo che $\text{tr}(A) = -7$, che $\det(A) = 4$ e che $p_A(-2) = 22$.
- In \mathbb{R}^3 trovare tutti i vettori unitari, con somma delle coordinate nulla e ortogonali a $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.
- Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & t & t^2 - 5 \\ t^2 + 4t & t^3 - 1 & 2 \\ 1 - t & t^2 + 2t - 1 & t + \pi \end{pmatrix}$.
- Determinare il tipo affine della quadrica $-y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 8y + 5 = 0$.
- Per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per $[2 : 0 : 1 : 0]$ e per $[1 : t - 1 : 0 : 3]$ incontra quella passante per $[1 : -1 : 0 : 2]$ e per $[t : 0 : 1 : 0]$?
- Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la forma $(6xy^4 + ax^2y^2) dx + (bx^2y^3 - 10x^3y) dy$ è esatta su \mathbb{R}^2 ?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.



1. In \mathbb{R}^3 considerare i vettori $v_1 = 4e_1 + e_2 - e_3$, $v_2 = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ e il sottospazio $X = \text{Span}(v_1, v_2)$
- (A) (4 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 su X .
- (B) (3 punti) Dette p_1 e p_2 le proiezioni ortogonali su v_1^\perp e v_2^\perp rispettivamente, provare che l'applicazione lineare $f = p_1 \circ p_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ha gli autovalori 0 e 1. [Suggerimento: *non* trovare le matrici di p_1 e p_2 , e in particolare *non* calcolare il polinomio caratteristico di f .]
- (C) (3 punti) Trovare un autovettore di f relativo all'autovalore diverso da 0 e da 1. [Suggerimento: come sopra.]
- (D) (2 punti) Trovare l'autovalore di f diverso da 0 e da 1. [Suggerimento: come sopra.]

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \cos(2s) \\ s^3 - s^2 + s \\ s^2 + \sin(3s) \end{pmatrix}$.

- (A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.
- (B) (5 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.
- (C) (5 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



Risposte ai quesiti

5. \diamond

1. $k \neq -\frac{1}{2}$

2. $t^3 + 7t^2 - 3t - 4$

3. $\pm \frac{1}{\sqrt{278}} \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. $t = -3$

5. Paraboloide iperbolico

6. $t = 2$ e $t = -\frac{1}{2}$

7. $a = -15$, $b = 12$

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond



Soluzioni degli esercizi

5. \diamond

1.

$$(A) M = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 50 & 14 & -2 \\ 14 & 5 & 7 \\ -2 & 7 & 53 \end{pmatrix}$$

(B) $p_2(v_2) = 0$, dunque $f(v_2) = 0$; se $v_3 = v_1 \wedge v_2$ si ha $p_1(v_3) = v_3$ e $p_2(v_3) = v_3$, dunque $f(v_3) = v_3$

(C) Poiché $p_2(X) \subset X$ e $p_1(X) \subset X$ si ha $f(X) \subset X$; inoltre $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(p_1) = v_1^\perp$, dunque un autovettore di f è un generatore u_1 di $X \cap v_1^\perp$

(D) Se u_2 è un generatore di $X \cap v_2^\perp$ l'immagine di u_1 tramite f si ottiene proiettando ortogonalmente prima su u_2 e poi su u_1 ; facendo i calcoli si trova $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$, da cui facilmente $f(u_1) = \frac{1}{7}u_1$

2.

(A) $Y'(t) > 0$ per ogni t

$$(B) t = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, n = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(C) \kappa = \frac{2}{11}\sqrt{6}, \tau = -\frac{23}{44}$$