UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 16/2/17 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

**1.** Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ sia diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 3t+14 & 2t^2-3t-14 \\ t+2 & 2t^2-t-2 \end{pmatrix}$.

**2.** Dati $v_1 = 2e_1 + 5e_2 + 2e_3$ e $v_2 = 3e_1 + 7e_2 + 4e_3$ determinare il vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3$ unitario, ortogonale a $v_1$ e a $v_2$ tale che $\det(v_1, v_2, v_3) < 0$.

**3.** Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ le rette in $\mathbb{R}^2$ di equazioni $(t-3)x+(2-t)y = -t$ e $(1-t)x+(11-t)y = t+5$, pensate come rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, hanno in comune soltanto un punto all'infinito.

**4.** Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica $(t-6)x^2 + 2txy + (2t+5)y^2 + 2(t+4)y = 0$ è degenere, e determinarne il tipo affine per i restanti valori di $t$.

**5.** Determinare il tipo affine della quadrica $5x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 2xy + 2yz - 2y + 4z = 0$.

**6.** Determinare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y) = (x-2y)\mathrm{e}^{3x+y}$ e i segni dei suoi autovalori.

**7.** Calcolare $\int_{\partial Q} \left( \left( y + \mathrm{e}^{x^2+\cos(x)} \right) \mathrm{d}x - (x + \ln(2+y))\,\mathrm{d}y \right)$ dove $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ e $\partial Q$ è orientato come bordo di $Q$.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 16/2/17 — Esercizî

**1.** Considerare la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t-1+i & 2+it \\ 2t-i & t+1+i \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che l'unico valore reale di $t$ per il quale esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di $A_t$ è $t = 1$.

(B) (4 punti) Per $t = 1$ calcolare gli autovalori di $A_t$ e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

(C) (3 punti) Provare che $A_2 + A_2^*$ ha autovalori reali e determinarne il segno.

(D) (3 punti) Provare che $\frac{1}{2}(A_3 - A_3^*)$ ha autovalori immaginari puri e determinarli.

**2.** Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s^2 + \sin(2s) \\ s^3 - s^2 + 5s \\ 3s^2 + s + \cos(s^2) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\alpha$ è semplice e regolare.

(B) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di $\alpha$ nel punto $s = 0$.

(C) (4 punti) Determinare curvatura e torsione di $\alpha$ nel punto $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta (x-y)(\,\mathrm{d}x - \,\mathrm{d}y)$ dove $\beta : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ è data da $\beta(s) = \alpha(s) + \alpha(-s)$



1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Risposte ai quesiti

## 5. ♢

**1.** $t \neq 3$

**2.** $\frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**3.** $t = \frac{7}{2}$

**4.** Degenere per $t = 6$ e $t = -4$; parabola per $t = -3$ e per $t = 10$; ellisse per $t < -4$, per $-4 < t < -3$ e per $t > 10$; iperbole per $-3 < t < 6$ e per $6 < t < 10$

**5.** Ellissoide

**6.** $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$; discordi

**7.** $-8$

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

---

# Soluzioni degli esercizî

## 5. ♢

**1.**

(A) Imponendo che $A_t$ commuti con la sua trasposta coniungata si ottiene il solo valore $t = 1$

(B) $\lambda_{1,2} = 1 + i \pm \sqrt{6}$; $v_{1,2} \frac{1}{\sqrt{12 \pm 2\sqrt{6}}} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \pm \sqrt{6} \end{pmatrix}$

(C) La matrice è hermitiana; ha determinante negativo, dunque ha autovalori discordi

(D) La matrice è antihermitiana; $\left(1 \pm \sqrt{5}\right) i$

**2.**

(A) La seconda componente di $\alpha'(s)$ è sempre positiva

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{330}} \begin{pmatrix} 16 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{1}{15}\sqrt{11}$, $\tau = -\frac{79}{330}$

(D) $8\pi^4$