



Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.
2. Che tipo di isometria di \mathbb{R}^3 è associata a una matrice $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $\det(A) = -1$ e $\operatorname{tr}(A) = \sqrt{3} - 1$.
3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha che $[t + 7 : 1 - 2t : 4t + 3]$ e $[t - 7 : t - 1 : -2t]$ sono lo stesso punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?
4. Determinare il tipo affine della quadrica $3y^2 + 6xy - 4xz - 2yz + 4x + 2y + z + 7 = 0$.
5. Stabilire in quali $t \in \mathbb{R}$ la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t - t^2 \\ t^3 + 12t + 1 \end{pmatrix}$ ha curvatura positiva.
6. Calcolare $\int_{\alpha} x \, dy$ con $\alpha : [0, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ t - \cos(t) \end{pmatrix}$.
7. Calcolare $\int_{\alpha} \left(\left(y - \ln \left(\frac{1+x^2}{1+x^4} \right) \right) dx + x^2 \, dy \right)$ con $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sottospazio di \mathbb{R}^3

$$X_t = \text{Span}(-te_1 + (t-4)e_2 + (t+10)e_3, (t-1)e_1 + (1-4t)e_2 + (5t-2)e_3).$$

- (A) (2 punti) Determinare l'unico valore \bar{t} di t per il quale X_t non è un piano.
- (B) (2 punti) Calcolare la matrice della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 su $X_{\bar{t}}$ (cioè su X_t per il valore \bar{t} trovato al punto precedente).
- (C) (4 punti) Calcolare le matrici A e B delle proiezioni ortogonali di \mathbb{R}^3 rispettivamente su X_1 e su X_0 (cioè su X_t per $t = 1$ e per $t = 0$).
- (D) (2 punti) Provare che $A + kB$ è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- (E) (2 punti) Provare che $A - B$ ha l'autovalore 0. [Suggerimento: non fare i calcoli, che sono difficili.]

2. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 3 \\ 2+2i & 2i & 3i \\ z-i & 1+iz & z \end{pmatrix}$.

- (A) (3 punti) Provare che $\det(A) = 2iz$.
- (B) (3 punti) Sapendo che $p_A(1) = (z-1)(1-i)$ determinare $p_A(t)$.
- (C) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore 2 determinare gli altri.
- (D) (3 punti) Stabilire per quali z la matrice A è diagonalizzabile.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



Risposte ai quesiti

5. \diamond

1. $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2; v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ intorno a una retta ℓ e riflessione rispetto a ℓ^\perp 3. $t = 3$

4. Paraboloide iperbolico

5. $-1 < t < 4$ 6. $\frac{1}{3}$ 7. $-\pi$

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond



Soluzioni degli esercizi

5. \diamond

1.

(A) $\bar{t} = -2$

(B) $\frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 9 & -12 \\ 4 & -12 & 16 \end{pmatrix}$

(C) $A = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} 2 & -8 & -8 \\ -8 & 65 & -1 \\ -8 & -1 & 65 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 29 & -5 & -2 \\ -5 & 5 & -10 \\ -2 & -10 & 26 \end{pmatrix}$

(D) È simmetrica

(E) X_0 e X_1 sono piani distinti, dunque si incontrano in una retta generata da un vettore v ; si ha allora $Av = v$ e $Bv = v$, dunque $(A - B)(v) = 0$

2.

(A) Usando la seconda colonna per ottenere zeri nei posti sulla prima riga tranne che al secondo posto si conclude facilmente

(B) $t^3 - (2 + z + i)t^2 + (2z + iz + 2i)t - 2iz$

(C) z e i (D) $z \neq 2$