UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 30/1/17 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Di un predicato $\mathcal{P}(n)$ relativo a $n \in \mathbb{Z}$ è noto che $\mathcal{P}(10)$ è vero e che se $\mathcal{P}(n+1)$ è vero allora lo è $\mathcal{P}(n)$. Per quali $n \in \mathbb{Z}$ si può concludere che $\mathcal{P}(n)$ è vero?

2. Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^4$ è lineare non surgettiva e $f(2e_2 + e_8) = 3e_3 + e_4$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

4. Risolvere $\begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ 4x + y - 5z = 2 \\ 3x + 7y + 6z = 7. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{2,1}$.

6. Sapendo che $\det(v_1, v_2, v_3) = -\frac{1}{2}$ calcolare $\det(2v_1 - 5v_2, 4v_2 - v_3, -2v_1 + 3v_3)$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_1 + 4e_2 + e_3)$ calcolare la proiezione su X di $e_1 + 7e_2 - 4e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare $W = \{x \in \mathbb{R}^5 : -15x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0\}$, $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che è possibile completare (w_1, w_2) a una base di W.

(B) (3 punti) Elencare i vettori di W con le seguenti proprietà: le componenti di indice pari sono nulle; tra le componenti di indice dispari, una è nulla e le altre due sono intere prime fra loro, con la prima delle due positiva.

(C) (4 punti) Detti w_3, w_4, w_5 i vettori del punto (B) ordinati in modo che sia crescente la somma delle coordinate, estrarre da $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ una base $\mathcal{B}$ di V.

(D) (3 punti) Se $f : \mathbb{R}^2 \to V$ è lineare e $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}^{(2)}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 8 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcolare $f(e_1 + e_2)$.

2. Al variare di $s, t \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_s : \begin{cases} (s-1)x - (2s+3)y + (s+4)z = -(3s+2) \\ (s-8)x + sy + (2-s)z = s+2 \end{cases} \qquad F_t = \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t-2 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (2 punti) Trovare l'unico valore s_0 di s per il quale E_s non è una retta.

(B) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di E_s per $s = s_0$.

(C) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di E_s per $s = -2$.

(D) (2 punti) Provare che F_t è sempre un piano.

(E) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_t per $t = 3$.

(F) (2 punti) Determinare la posizione reciproca di $E_{(-2)}$ ed F_3.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. Per $n \leq 10$, applicando il principio di induzione a $\mathcal{Q}(n) = \mathcal{P}(10-n)$. Nel caso in cui $\mathcal{P}(n)$ è precisamente il predicato "$n \leq 10$" si vede che la conclusione vale esattamente per $n \leq 10$

2. $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. Tra 6 e 8 compresi

4. $x = -3,\ y = 4,\ z = -2$

5. $-\frac{9}{11}$

6. -7

7. $19e_1 + 31e_2 + 2e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) w_1 e w_2 soddisfano l'equazione che definisce W e sono linearmente indipendenti.

(B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

(C) L'ordine è il precedente; $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$

(D) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 10 \\ -1 \\ -15 \end{pmatrix}$

2.

(A) $s_0 = 6$

(B) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

(C) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(D) $\det\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = 0$ per $t = \pm 1$ ma in tal caso $\det\begin{pmatrix} 1 & t \\ t+2 & t-2 \end{pmatrix} \neq 0$

(E) $-7x + y + 4z = -21$

(F) Paralleli tra loro