UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 15/6/17 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ______

1. Dato un sistema di 3 vettori di $\{z \in \mathbb{C}^6 : (1-i)(z_1+z_2-z_3) = (2+i)(z_4-z_5+z_6)\}$,
è sempre possibile completarlo a una base? Se è possibile, quanti vettori bisogna aggiungere?

2. Date $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
trovare $[v]_{\mathcal{B}}$ sapendo che $[v]_{\mathcal{C}} = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^{13} :\ 5x_2 - 9x_8 = 0\}$, se $f : \mathbb{R}^9 \to X$ è lineare, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ e $\mathrm{Im}(f) \oplus W = X$, che dimensione ha W?

4. Risolvere $\begin{cases} 2x+4y-z=1 \\ -3x+y+2z=13 \\ x-2y+5z=-2. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{2,1}$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 + 5e_3)$,
calcolare la proiezione su X di $3e_1 - e_2 + e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 15/6/17 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio U definito dalle equazioni $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ e la matrice $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 7 & 9 & 19 \\ 0 & 0 & -10 & -6 \\ 2 & 7 & -7 & -9 \\ -10 & -1 & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Esibire tutti i vettori di U che hanno una coordinata nulla e le altre intere e prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (3 punti) Disporre i vettori trovati al punto precedente in modo che sia crescente la somma dei valori assoluti delle coordinate, quindi estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di U.

(C) (3 punti) Provare che l'espressione $f(u) = M \cdot u$ definisce un'applicazione lineare $f : U \to U$.

(D) (3 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio affine

$$E_t : \begin{cases} (t-4)x + (2-t)y + (t-1)z + (3-t)w = t \\ (3-t)x + (16-2t)y + (7-3t)z + (9-t)w = -t-5. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Determinare $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ e t_0 in $\mathbb{R}$ tali che $\dim(E_t) = \begin{cases} n_0 & \text{per } t = t_0 \\ n_1 & \text{per } t \neq t_0. \end{cases}$

(B) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di E_0, cioè di E_t per $t = 0$.

(C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di E_{t_0}, cioè di E_t per $t = t_0$.

(D) (3 punti) Stabilire che tipo di sottospazio affine sia $E_0 \cap E_{t_0}$.

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. Solo se è linearmente indipendente; 2

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. 5

4. $x = -3,\ y = 2,\ z = 1$

5. $-\frac{2}{7}$

6. -9

7. $17e_1 - 8e_2 + 36e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \\ -23 \end{pmatrix}$

(B) L'ordine è il precedente; si tengono i primi 2 vettori

(C) Moltiplicando per M gli elementi di $\mathcal{B}$ si ottengono vettori che soddisfano le equazioni di U

(D) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2.

(A) $n_0 = 3,\ n_1 = 2,\ t_0 = 5$

(B) $-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(D) Una retta