UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 16/2/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se sono dati 7 generatori di $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}): \ (A)_{2,1} = (A)_{1,3}\}$,
quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

2. Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ sapendo che posto $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-4 \\ b+1 \end{pmatrix} \right)$ si ha $\left[\begin{pmatrix} -4 \\ 4a+1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b+1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Se $X = \{z \in \mathbb{C}^{12}: \ (2-i)z_1 + 6z_8 - 5iz_{11} = 0\}$ e $Y, Z \subset X$ sono sottospazî
di dimensioni rispettive 6 e 8 tali che $Y + Z \neq X$, che dimensione può avere $Y \cap Z$?

4. Risolvere $\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 7 \\ 4x + y - 2z = -19 \\ -3x + 2y + z = 15. \end{cases}$

5. Descrivere $\{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \ \det(M + {}^{\mathrm{t}}M) = 4\det(M)\}$.

6. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Trovare la matrice A della proiezione di $\mathbb{R}^3$ su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$,
dove $X = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2, \ 5e_1 + e_3)$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_2 + e_3)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. In $\mathbb{C}^3$ considerare il sottospazio W di equazione $(1-i)z_1 - 2z_2 - iz_3 = 0$
e la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & i-1 & 3i \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ in modo che appartengano a W i vettori
$$w_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 2 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

(B) (3 punti) Provare che la formula $g(z) = A \cdot z$ definisce un'applicazione $g : W \to W$ lineare.

(C) (2 punti) Provare che $\mathcal{B} = (w_2, w_3)$ e $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ sono basi di V.

(D) (4 punti) Trovare $[g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2t & 1 & 3-t \\ 2 & t-5 & -9 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Trovare i valori t_1 e t_2 di t, con $t_1 < t_2$ per i quali l'applicazione lineare $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata ad A_t non è iniettiva.

Porre ora $f = f_{t_2}$, ovvero $f = f_2$ per $t = t_2$, nonché $K = \mathrm{Ker}(f)$ e $W = \mathrm{Im}(f)$.

(B) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di K e cartesiane di W.

(C) (3 punti) Provare che $\mathbb{R}^3 = K \oplus W$ e dedurne che la restrizione di f a W definisce un'applicazione $g : W \to W$ invertibile.

(D) (3 punti) Trovare la proiezione su W del vettore $11e_1 + 2e_2 - 12e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = K \oplus W$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♡

1. 2

2. $a = 5,\ b = 2$

3. Tra 4 e 6 estremi compresi

4. $x = -3,\ y = 1,\ z = 4$

5. È lo spazio delle matrici 2×2 simmetriche

6. 182 e -84

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 15 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\alpha_1 = 1+i,\ \alpha_2 = -i,\ \alpha_3 = -2i$

(B) Posto $\omega = (1-i, -2, -i)$ si ha $\omega \cdot A = i \cdot \omega$.

(C) Sono coppie di vettori linearmente indipendenti di W, che ha dimensione 2

(D) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3-i & 2 \\ 1+7i & 4-2i \end{pmatrix}$

2.

(A) $t_1 = -\frac{22}{7},\ t_2 = -2$

(B) $K = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $W:\ 26x + 31y + 23z = 0$

(C) $K \cap W = \{0\}$; la g è ben definita e iniettiva, dunque è surgettiva

(D) $7e_1 + 6e_2 - 16e_3$