UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 13/1/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se in $Z = \{z \in \mathbb{C}^{10} : (1+i)z_1 + 7z_{10} = iz_7 + (2-i)z_9\}$ sono dati 6 vettori linearmente indipendenti, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base di Z?

2. Trovare v_1 sapendo che se $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ si ha $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Data $f : \{x \in \mathbb{R}^8 : \sum_{j=1}^{8} x_j = 0\} \to \mathbb{R}^{12}$ tale che $f(e_3 - e_6) = f(e_8 - e_1) = 7e_{12} - 2e_2$, dire quanto può valere la dimensione di $X \subset \mathbb{R}^{12}$ tale che $\mathbb{R}^{12} = X \oplus \mathrm{Im}(f)$.

4. Stabilire quante sono al variare di $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni di $\begin{cases} (t+1)x + (t-9)y = t-1 \\ -2tx + (2t+3)y = -t. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{3,2}$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_1 - 3e_2 + e_3)$, esibire la matrice A della proiezione di $\mathbb{R}^3$ su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$, verificando che $A \cdot A = A$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 13/1/16 — Esercizî

1. Considerare

$$w_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\4\end{pmatrix},\ w_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\1\end{pmatrix},\ w_3=\begin{pmatrix}5\\5\\4\\14\end{pmatrix},\ w_4=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\end{pmatrix},\ w_5=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}-1&1&5\\4&-3&1\\3&-1&27\end{pmatrix}.$$

Porre $W=\mathrm{Span}(w_1,\ldots,w_5)\subset\mathbb{R}^4$.

(A) (3 punti) Estrarre da $(w_1,\ldots,w_5)$ una base $\mathcal{B}$ di W, provando che W ha dimensione 3.

(B) (2 punti) Calcolare il rango di M.

Definire ora l'applicazione lineare $h:W\to W$ tale che $[h]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}=M$.

(C) (4 punti) Calcolare $h(w_5)$.

(D) (3 punti) Trovare una base di $\mathrm{Im}(h)$ e provare che, per qualsiasi scelta di $i,j\in\{1,2,3,4\}$ distinti, posto $X_{i,j}=\mathrm{Span}(e_i,e_j)$ si ha $\mathbb{R}^4=\mathrm{Im}(h)\oplus X_{i,j}$.

2. Al variare di $s,t\in\mathbb{R}$ considerare il $\mathbb{R}^4$ i sottospazî affini

$$E_s=\begin{pmatrix}2\\s-1\\1\\-s\end{pmatrix}+\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}4-2s\\3-s\\3s-1\\s-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s+4\\s-2\\4-5s\\-s-1\end{pmatrix}\right),\quad F_t=\begin{pmatrix}-1\\3t+7\\2\\1-5t\end{pmatrix}+\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}t+1\\1\\2t+5\\t\end{pmatrix}\right).$$

Trovare:

(A) (2 punti) L'unico valore di s per cui E_s non ha dimensione 2.

(B) (3 punti) Equazioni cartesiane di E_s per $s=-2$.

(C) (2 punti) Equazioni cartesiane di F_t per $t=1$.

(D) (2 punti) L'unico valore di t per cui F_t è parallelo al sottospazio $x_1+3x_2+4x_3-3x_4=\sqrt[5]{11}$.

(E) (3 punti) La posizione reciproca di E_1 (cioè E_s per $s=1$) ed F_t al variare di t.

Risposte

5. ♡

1. 3

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Tra 6 e 11 estremi compresi

4. Infinite per $t = 3$, nessuna per $t = \frac{1}{4}$, una altrimenti

5. $\frac{3}{5}$

6. -3

7. $\begin{pmatrix} -14 & -12 & 6 \\ 15 & 13 & -6 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1.

(A) (w_1, w_2, w_4)

(B) 2

(C) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 20 \\ 65 \\ -61 \\ 67 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$; cancellando le righe i e j da questa coppia di vettori resta sempre una matrice 2×2 con determinante non nullo

2.

(A) $s = 5$

(B) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 7 \\ x_2 - x_4 = 14 \\ x_3 - 7x_4 = 30 \end{cases}$

(D) $t = -4$

(E) Incidenti in un punto per $t = -2$ e per $t = -\frac{1}{3}$, disgiunti e non paralleli altrimenti