



1. Dati 12 generatori di $\{z \in \mathbb{C}^9 : 3z_1 + iz_7 = (1+i)z_4 + (3-i)z_9 = 0\}$ quanti bisogna scartarne per avere una base?

2. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$ e $f : X \rightarrow X$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ -4x_1 + x_3 \end{pmatrix}$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

3. Se $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^4$ è lineare e non surgettiva, che dimensione può avere il suo nucleo?

4. Risolvere $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 4x + 5y + 2z = 16 \\ -2x + y + 7z = 25. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{32}$.

6. In una matrice 3×3 un coefficiente vale $\sqrt{2}$ e tutti gli altri sono interi. Può il determinante essere un intero non nullo? Spiegare.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $Y = \text{Span}(9e_1 + 2e_2 + e_3)$, calcolare la proiezione su X di $2e_1 + 3e_2 - 6e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.



1. Considerare $X = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[t] : p'(-1) = 0\}$ e $v(t) = 4 - t - 5t^2 - 3t^3$.
- (A) (1 punto) Provare che $v(t) \in X$.
- (B) (1 punto) Provare che $1 \in X$ mentre $t^k \notin X$ per $k > 1$.
- (C) (3 punti) Esibire tutti i vettori di X della forma $a \cdot t^k + b \cdot t^h$ con a, b interi non nulli primi fra loro, $a > 0$ e $0 \leq k < h \leq 3$.
- (D) (3 punti) Ordinare i polinomi $p(t)$ trovati al punto precedente in modo che sia crescente la quantità $p(1)$, quindi aggiungere 1 in fondo alla lista trovata ed estrarre una base di X .
- (E) (4 punti) Dette \mathcal{B} la base del punto precedente e $f : X \rightarrow X$ l'applicazione lineare tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare $f(v(t))$.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare in \mathbb{R}^3 il sottospazio affine

$$E = \begin{pmatrix} k-2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} k-1 \\ k+5 \\ k-11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4-2k \\ -3k \\ k+4 \end{pmatrix} \right).$$

- (A) (4 punti) Trovare $k_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $\dim(E_{k_0}) = n_0$ e $\dim(E_k) = n_1$ per $k \neq k_0$.
- (B) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_k per $k = -1$ e per $k = k_0$.
- (C) (4 punti) Al variare di k discutere la posizione di E rispetto alla retta F generata da $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.



Risposte

5. \diamond

1. 5

2. $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

3. Tra 5 e 8 compresi

4. $x = 4, y = -2, z = 5$

5. 2

6. Sì, ad esempio per $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $11e_1 + 5e_2 - 5e_3$

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond



Soluzioni

1.

(A) $v'(-1) = -1 + 10 - 9 = 0$

(B) $1' \equiv 0; (t^k)'(-1) = k(-1)^{k-1} \neq 0$

(C) $2t + t^2, 3t - t^3, 3t^2 + 2t^3$

(D) $3t - t^3, 2t + t^2, 3t^2 + 2t^3, 1$; scartare il terzo.

(E) $7 + 31t - t^2 - 11t^3$

2.

(A) $k_0 = 5, n_0 = 1, n_1 = 2$

(B) $-8x + 11y + 5z = 45; \begin{cases} 3x + 2z = 13 \\ 3y + 5z = 13 \end{cases}$

(C) Paralleli per $k = 3$, rette sghembe per $k = 5$, altrimenti incidenti in un punto