UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 29/1/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Calcolare $\int\limits_{\alpha} z$ dove $\alpha(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t)$ per $t \in [0, \sqrt{2}]$.

2. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 + z^4, \ |z| \leqslant 1\}$. Calcolare $\int\limits_{S} (z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{x+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$.

3. Trovare il massimo di $x + y - z$ sotto il vincolo $x^2 + y^2/3 + z^2/5 = 1$.

4. Se $\big(a_n^{(1)}\big)_{n=0}^{\infty}$ e $\big(a_n^{(2)}\big)_{n=0}^{\infty}$ sono soluzioni dell'equazione alle differenze $a_{n+2} = \frac{3-n}{3+n}a_{n+1} + \frac{1+n^2}{1+n^4}a_n$ e si ha $a_{10}^{(1)} \cdot a_{11}^{(2)} \neq a_{11}^{(1)} \cdot a_{10}^{(2)}$, si può concludere che esse costituiscono una base dello spazio delle soluzioni?

5. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + z^2 \leqslant 1, \ y = \cos(\pi(x^2 + z^2)/2)\}$.
Calcolare $\int\limits_{S} \langle \mathrm{rot}(v) | n \rangle$ dove n è un campo normale a S e $v(x, y, z) = (yx, \cos(xyz), x)$.

6. Sia $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2+n^2}\,\mathrm{e}^{int}$. Trovare una formula per $\alpha_n(f^2)$.

7. Sia $f(x) = 2^x \frac{x+1}{x^2+2}$ per $x \geqslant 0$. Per quali z esiste $\mathcal{L}(f)(z)$?

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 29/1/05 — Esercizî

1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1-x(t)\,\mathrm{e}^{-tx(t)}}{1+t\,\mathrm{e}^{-tx(t)}}, \\ x(0) = 1/2, \end{cases}$$

e se ne indichi con $x : (a,b) \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale, con $a \in [-\infty, 0)$ e $b \in (0, +\infty]$.

(A) (3 punti) Si dimostri che x è positiva e crescente su $[0,b)$.

(B) (2 punti) Si determini una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che la composizione $t \mapsto F(t, x(t))$ sia costante su (a,b).

(C) (2 punti) Si dimostri che se $b < +\infty$ allora $\lim\limits_{t\to b} x(t)$ e $\lim\limits_{t\to b} x'(t)$ esistono e sono finiti. Se ne deduca che $b = +\infty$.

(D) (3 punti) Si dimostri che $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

(E) (2 punti) Si calcoli $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)/t$.

2. Siano $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ e $f \in \mathcal{H}(\overline{\Delta})$ non costante. Si supponga che esista $R > 0$ tale che $|f(z)| = R$ per ogni $z \in \partial\Delta$.

(A) (2 punti) Si dimostri che $|f(z)| \leqslant R$ per ogni $z \in \Delta$.

(B) (3 punti) Si dimostri che esiste $z_0 \in \Delta$ tale che $f(z_0) = 0$. (Suggerimento: si ragioni per assurdo, applicando il punto precedente a f ed a $1/f$).

Sia ora $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$ e si osservi che esiste una funzione $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile tale che $f(\gamma(t)) = R\,\mathrm{e}^{i\theta(t)}$.

(C) (2 punti) Si calcolino espressioni esplicite di $f'(\gamma(t))$ e di $(f \circ \gamma)'(t)$ in funzione di $\theta(t)$ e $\theta'(t)$.

(D) (2 punti) Si calcoli $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$ in funzione di $\theta(0)$ e $\theta(1)$.

(E) (3 punti) Sia $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ il cammino dato da $\alpha = f \circ \gamma$. Si dimostri che l'indice di α rispetto a 0 è diverso da 0, ossia che si ha $\int_\alpha \frac{\mathrm{d}z}{z} \neq 0$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 29/1/05 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. $2(4-\sqrt{2})/3$.

2. 4π.

3. 3.

4. Sì

5. π.

6. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2+k^2)(2+(n-k)^2)}$.

7. Per $\Re(z) > \log 2$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡