UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 19/2/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Sia $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una successione di punti distinti, e sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 in x_n ed è nulla altrove. Qual è il limite puntuale della $(f_n)_{n=0}^{\infty}$? Tale limite è uniforme?

2. Trovare l'armonica coniugata di $u(x, y) = \mathrm{e}^{-y}\big((x^2 - y^2)\cos(x) - 2xy\sin(x)\big)$.

3. Sia $\ell = \{t \in \mathbb{R} : \ t \leqslant 0\}$ e sia $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \ell)$. Quanto risulta il raggio di convergenza dello sviluppo di f in serie di Taylor centrato in $1 + 2i$?

4. Calcolare $\displaystyle\int_{\partial\Delta(i,2)} \frac{z^2\,\mathrm{d}z}{(z+1)(z+2i)}$.

5. Sia $f = \chi_{[0,1)}$. Per quali $t \in [-\pi, \pi]$ si ha che $S_N(f)(t)$ converge a $f(t)$? Su quali intervalli chiusi contenuti in $[-\pi, \pi]$ la convergenza è uniforme?

6. Sia $F = \mathcal{F}(f)$, $g(t) = f(t)^2$ e $G = \mathcal{F}(g)$. Che legame c'è tra G e F?

7. Siano $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leqslant z^2, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ e $v(x, y, z) = (2xz, \cos(x + z), -z^2)$. Calcolare $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle v|n\rangle$ dove n è la normale a $\partial\Omega$ esterna a Ω.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 19/2/05 — Esercizî

1. Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - y^2 + z^2 = 1, \ |y| \leqslant 1\}$. Si considerino la 2-forma su $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (z - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

e, per ogni a in $\mathbb{R}$, la 1-forma

$$\varphi_a = y\left((y + az)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z\right).$$

(A) (2 punti) Si dimostri che Σ è una superficie con bordo.

(B) (3 punti) Si determini una parametrizzazione di Σ.

(C) (2 punti) Si dimostri che ω è chiusa.

(D) (2 punti) Si determini l'unico valore $a_0 \in \mathbb{R}$ tale che si abbia $\omega = \mathrm{d}\varphi_{a_0}$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\int_\Sigma \omega$, con Σ orientata secondo la parametrizzazione data al punto (B).

2. Sia k un numero reale positivo e si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t^3 x(t)}{1+t^2 x(t)}, \\ x(0) = k. \end{cases}$$

Sia $x_k : (a_k, b_k) \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale di tale problema, con $a_k \in [-\infty, 0)$ e $b_k \in (0, +\infty]$.

(A) (2 punti) Si dimostri che x_k è positiva e crecente su $[0, b_k)$ e che $x_k(t) = x_k(-t)$ laddove tale uguaglianza ha senso. Se ne deduca che $a_k = -b_k$.

(B) (2 punti) Si dimostri che $a_k = -\infty$ e $b_k = +\infty$, ossia che x_k è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(C) (3 punti) Si dimostri che $\lim_{t\to+\infty} x_k(t) = +\infty$.

(D) (2 punti) Si calcoli $\lim_{t\to+\infty} x_k'(t)/t$.

(E) (3 punti) Si dimostri che $\lim_{t\to+\infty} x_k(t)/t^2 = 1/2$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 19/2/05 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. Il limite puntuale è la funzione nulla, e non è uniforme.

2. $v(x, y) = \mathrm{e}^{-y}\big((x^2 - y^2)\sin(x) + 2xy\cos(x)\big)$.

3. Almeno $\sqrt{5}$.

4. $2\pi(2 - i)/5$.

5. Convergenza puntuale per $t \neq 0, 1$. Convergenza uniforme su $[a, b]$ per $-\pi \leqslant a < b < 0$, per $0 < a < b < 1$ e per $1 < a < b \leqslant \pi$.

6. $G = \frac{1}{2\pi} F * F$.

7. 0.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$