UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 16/7/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Sia $g(t) = |t|$. Può esistere una successione di funzioni continue $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $f_n(0) = 0$ per ogni n e $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{0<|t|\leqslant 1} |f_n(t) - g'(t)| = 0$? Perché?

2. Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $a \in \mathcal{H}(A)$, la forma $a(z)\,\mathrm{d}z$ è sempre il differenziale di una $b \in \mathcal{H}(A)$? Perché?

3. Calcolare $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(3z-i)(z+2)}$.

4. Se $f, g \in \mathcal{H}(\Delta)$ coincidono sui punti $\frac{n}{n+1}\,\mathrm{e}^{-in\pi}$ per $n \in \mathbb{N}$, allora coincidono sempre? Perché?

5. Sia $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ pari con media nulla. Che relazioni ci sono tra i coefficienti di Fourier reali di g e quelli complessi?

6. Quanto fa $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^2 t^2 \sin(3 + nt)\,\mathrm{d}t$?

7. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ e

$$v(x, y, z) = (x(1 + \mathrm{e}^y), 1 + y(x^2 - 1), -z(x^2 + \mathrm{e}^y)).$$

Sia n un campo normale unitario ad S. Calcolare $\int\limits_S \langle v|n\rangle$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 16/7/05 — Esercizî

1. Sia V l'insieme delle funzioni $x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ di classe (almeno) C^2 che verificano l'equazione differenziale $t^2 x''(t) + t(t-4)x'(t) + (-2t+6)x(t) = 0$.

(A) (1 punto) Si dimostri che V è uno spazio vettoriale e se ne determini la dimensione.

(B) (2 punti) Si determini l'unico valore $n \in \mathbb{N}$ tale che la funzione $t \mapsto t^n$ appartiene a V.

(C) (4 punti) Si determini una base di V.

Siano ora a, b reali e si consideri il problema $\begin{cases} t^2 x''(t) + t(t-4)x'(t) + (-2t+6)x(t) = 0 \\ x(0) = a \\ x'(0) = b. \end{cases}$

(D) (2 punti) Si dimostri che se il problema ha una soluzione locale, allora ne ha infinite.

(E) (3 punti) Si determinino i valori di a, b per cui il problema ha infinite soluzioni locali.

2. Al variare di a in $\mathbb{R}$ e $r > 0$ siano

$$\begin{aligned}
\omega_a &= \frac{axz + y^2}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{xy + ayz}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \frac{x^2 + axz}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \\
\Sigma_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - 1 - 2\sin z - \sin^2 z = 0, \ 0 \leqslant z \leqslant \pi\right\}, \\
\Sigma_2 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + (y-10)^2 - 1 - 2\sin z - \sin^2 z = 0, \ 0 \leqslant z \leqslant \pi\right\}, \\
C_r &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = r^2, \ 0 \leqslant z \leqslant \pi\right\}
\end{aligned}$$

(A) (2 punti) Si dimostri che ω_a è chiusa se e solo se $a = 1$.

(B) (2 punti) Si dimostri che Σ_1 e Σ_2 sono superfici con bordo.

(C) (3 punti) Si calcoli $\int_{C_r} \omega_1$, al variare di r in $\mathbb{R}$.

(D) (2 punti) Si calcoli $\int_{\Sigma_1} \omega_1$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\int_{\Sigma_2} \omega_1$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 16/7/05 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. No, perché ci sarebbe convergenza uniforme su $[-1,1]$, ma g' non è continua in 0.

2. No: $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a(z) = 1/z$.

3. $(6-i)/148$

4. No, perché i punti considerati sono isolati in Δ.

5. $b_n(f) = 0$ per ogni n, $a_0(f) = \alpha_0(f) = 0$, $\alpha_n(f) = \alpha_{-n}(f) = a_n(f)/2$ per $n > 0$.

6. 0, grazie al lemma di Riemann-Lebesgue.

7. $\pm 7\pi/4$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡