UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 16/7/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Sia $f(x) = |x|$. Può esistere una successione di funzioni continue $g_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che $g_n(0) = 0$ per ogni n e $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{0<|x|\leqslant 1} |g_n(x) - f'(x)| = 0$? Perché?

2. Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, la forma $f(z)\,\mathrm{d}z$ è sempre il differenziale di una $g \in \mathcal{H}(\Omega)$? Perché?

3. Calcolare $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(2z+i)(z-2)}$.

4. Se $f, g \in \mathcal{H}(\Delta)$ coincidono sui punti $(1 - 1/n)\,\mathrm{e}^{in\pi}$ per $n \geqslant 1$, allora coincidono sempre? Perché?

5. Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dispari. Che relazioni ci sono tra i coefficienti di Fourier reali di f e quelli complessi?

6. Quanto fa $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 t^3 \cos(2 + nt)\,\mathrm{d}t$?

7. Siano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ e

$$v(x,y,z) = (x(1 + \mathrm{e}^z), -y(x^2 + \mathrm{e}^z), 1 + z(x^2 - 1)).$$

Sia n un campo normale unitario ad S. Calcolare $\int\limits_S \langle v|n\rangle$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 16/7/05 — Esercizî

1. Sia V l'insieme delle funzioni $x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ di classe (almeno) C^2 che verificano l'equazione differenziale $t^2 x''(t) + t(t-4)x'(t) + (-2t+6)x(t) = 0$.

(A) (1 punto) Si dimostri che V è uno spazio vettoriale e se ne determini la dimensione.

(B) (2 punti) Si determini l'unico valore $n \in \mathbb{N}$ tale che la funzione $t \mapsto t^n$ appartiene a V.

(C) (4 punti) Si determini una base di V.

Siano ora a, b reali e si consideri il problema $\begin{cases} t^2 x''(t) + t(t-4)x'(t) + (-2t+6)x(t) = 0 \\ x(0) = a \\ x'(0) = b. \end{cases}$

(D) (2 punti) Si dimostri che se il problema ha una soluzione locale, allora ne ha infinite.

(E) (3 punti) Si determinino i valori di a, b per cui il problema ha infinite soluzioni locali.

2. Al variare di a in $\mathbb{R}$ e $r > 0$ siano

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{axz + y^2}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{xy + ayz}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \frac{x^2 + axz}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \\ \Sigma_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - 1 - 2\sin z - \sin^2 z = 0,\ 0 \leqslant z \leqslant \pi\right\}, \\ \Sigma_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + (y-10)^2 - 1 - 2\sin z - \sin^2 z = 0,\ 0 \leqslant z \leqslant \pi\right\}, \\ C_r &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = r^2,\ 0 \leqslant z \leqslant \pi\right\} \end{aligned}$$

(A) (2 punti) Si dimostri che ω_a è chiusa se e solo se $a = 1$.

(B) (2 punti) Si dimostri che Σ_1 e Σ_2 sono superfici con bordo.

(C) (3 punti) Si calcoli $\int_{C_r} \omega_1$, al variare di r in $\mathbb{R}$.

(D) (2 punti) Si calcoli $\int_{\Sigma_1} \omega_1$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\int_{\Sigma_2} \omega_1$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 16/7/05 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. No, perché ci sarebbe convergenza uniforme su $[-1, 1]$, ma f' non è continua in 0.

2. No: $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = 1/z$.

3. $(-4 + i)/68$.

4. No, perché i punti considerati sono isolati in Δ.

5. $a_n(f) = 0$ per ogni n, $\alpha_0(f) = 0$, $\alpha_n(f) = -ib_n(f)/2$ per $n > 0$, $\alpha_n(f) = ib_{-n}(f)/2$ per $n < 0$.

6. 0, grazie al lemma di Riemann-Lebesgue.

7. $\pm 7\pi/4$.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$