UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 15/1/05 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** _____

1. Calcolare $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n} x^{2n} \right) \mathrm{d}x$.

2. Intorno a quali punti l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2xy + z^2 = 2xz + y^2 = 0\}$ non è una curva?

3. Si provi che le soluzioni dell'equazione differenziale $x' = 1 + \cos(x^2 - t^2)$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

4. Sia $a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - 12a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 21$. Quanto fa $\lim_{n\to+\infty} 3^{-n} a_n$?

5. Sia $f(x) = \frac{x-x^2}{|x|}$ per $0 < |x| < \pi$. Quanto fa $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n(f)$?

6. Se $F = \mathcal{F}(f)$, $g(x) = f'(-x+2)$ e $G = \mathcal{F}(g)$, che legame c'è tra G e F?

7. Discutere la natura del punto stazionario $(0,0)$ per il sistema $\begin{cases} x' = y\,\mathrm{e}^x + xy \\ y' = \sin(x+y). \end{cases}$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 15/1/05 — Esercizî

1. Per ogni a in $\mathbb{R}$ sia $\Sigma_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+(z-a)^4 = 1\}$. Sia inoltre ω la 2-forma su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definita da $(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot (x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$. Per ogni $r > 0$ si indichi con S_r la sfera di raggio r centrata nell'origine, orientata dalla normale "uscente".

(A) (2 punti) Si provi che Σ_a è una superficie e si trovino i due valori a_1, a_2 di a tali che $0 \in \Sigma_a$.

(B) (2 punti) Si dimostri che ω è chiusa.

(C) (3 punti) Si calcoli $\int\limits_{S_1} \omega$.

(D) (2 punti) Si dimostri che $\int\limits_{S_r} \omega = \int\limits_{S_1} \omega$ per ogni $r > 0$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\int\limits_{\Sigma_a} \omega$ al variare di a in $\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2\}$.

2. Si consideri la funzione meromorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = \frac{1-\mathrm{e}^{iz}}{z^2(z^2+1)}$.

(A) (2 punti) Si determinino i poli di f e se ne calcolino i relativi residui.

Per ogni $R > 1$ si considerino le curve

$$\begin{array}{llll} \gamma_R^1 : [-R,-1/R] \to \mathbb{C}, & \gamma_R^1(t) = t, & \gamma_R^2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}, & \gamma_R^2(t) = \mathrm{e}^{i(\pi-t)}/R, \\ \gamma_R^3 : [1/R, R] \to \mathbb{C}, & \gamma_R^3(t) = t, & \gamma_R^4 : [0,\pi] \to \mathbb{C}, & \gamma_R^4(t) = R\,\mathrm{e}^{it}. \end{array}$$

(B) (2 punti) Si dimostri che $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R^4} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

(C) (3 punti) Si dimostri che $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R^2} f(z)\mathrm{d}z = -i\pi\mathrm{Res}(f,0)$, dove $\mathrm{Res}(f,0)$ è il residuo di f in 0.

(Suggerimento: si scriva $f(z) = a/z + h(z)$, dove h è olomorfa in un intorno dell'origine).

(D) (2 punti) Si dimostri che la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = (1-\cos x)/(x^2(x^2+1))$ è continua e integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. 4/3.

2. $(0, 0, 0)$.

3. La derivata è limitata tra 0 e 2

4. Non esiste.

5. $-\pi$

6. $G(t) = -it\,\mathrm{e}^{-2it}F(-t)$.

7. Si tratta di un punto di sella.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$