



 Matematica III — Scritto del 15/1/05 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Calcolare $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n} x^{2n} \right) dx$.

2. Intorno a quali punti l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2xy + z^2 = 2xz + y^2 = 0\}$ non è una curva?

3. Si provi che le soluzioni dell'equazione differenziale $x' = 1 + \cos(x^2 - t^2)$ sono definite su tutto \mathbb{R} .

4. Sia $a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - 12a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 21$. Quanto fa $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{-n} a_n$?

5. Sia $f(x) = \frac{x-x^2}{|x|}$ per $0 < |x| < \pi$. Quanto fa $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n(f)$?

6. Se $F = \mathcal{F}(f)$, $g(x) = f'(-x + 2)$ e $G = \mathcal{F}(g)$, che legame c'è tra G e F ?

7. Discutere la natura del punto stazionario $(0, 0)$ per il sistema $\begin{cases} x' = y e^x + xy \\ y' = \sin(x + y) \end{cases}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1. Per ogni a in \mathbb{R} sia $\Sigma_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - a)^4 = 1\}$. Sia inoltre ω la 2-forma su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definita da $(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot (x dy dz + (z - y) dx dz + (z + y) dx dy)$. Per ogni $r > 0$ si indichi con S_r la sfera di raggio r centrata nell'origine, orientata dalla normale "uscente".

- (A) (2 punti) Si provi che Σ_a è una superficie e si trovino i due valori a_1, a_2 di a tali che $0 \in \Sigma_a$.
- (B) (2 punti) Si dimostri che ω è chiusa.
- (C) (3 punti) Si calcoli $\int_{S_1} \omega$.
- (D) (2 punti) Si dimostri che $\int_{S_r} \omega = \int_{S_1} \omega$ per ogni $r > 0$.
- (E) (3 punti) Si calcoli $\int_{\Sigma_a} \omega$ al variare di a in $\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2\}$.

2. Si consideri la funzione meromorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ data da $f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2 + 1)}$.

- (A) (2 punti) Si determinino i poli di f e se ne calcolino i relativi residui.

Per ogni $R > 1$ si considerino le curve

$$\begin{aligned} \gamma_R^1 : [-R, -1/R] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_R^1(t) = t, \quad \gamma_R^2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_R^2(t) = e^{i(\pi-t)}/R, \\ \gamma_R^3 : [1/R, R] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_R^3(t) = t, \quad \gamma_R^4 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_R^4(t) = R e^{it}. \end{aligned}$$

- (B) (2 punti) Si dimostri che $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^4} f(z) dz = 0$.
- (C) (3 punti) Si dimostri che $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^2} f(z) dz = -i\pi \text{Res}(f, 0)$, dove $\text{Res}(f, 0)$ è il residuo di f in 0.
(Suggerimento: si scriva $f(z) = a/z + h(z)$, dove h è olomorfa in un intorno dell'origine).
- (D) (2 punti) Si dimostri che la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x) = (1 - \cos x)/(x^2(x^2 + 1))$ è continua e integrabile in senso improprio su \mathbb{R} .

- (E) (3 punti) Si calcoli $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2 + 1)} dx$.



Risposte esatte

5. \diamond

1. $4/3$.
2. $(0, 0, 0)$.
3. La derivata è limitata tra 0 e 2
4. Non esiste.
5. $-\pi$
6. $G(t) = -ite^{-2it}F(-t)$.
7. Si tratta di un punto di sella.

1. \heartsuit 2. \clubsuit 3. \spadesuit 4. \diamond 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \spadesuit 8. \diamond 9. \clubsuit 10. \heartsuit
