UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 12/09/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Sia $\alpha(t) = (\log(t), t^{3/2}, 1/t)$ per $0 < t \leqslant 1$. Calcolare $\int_\alpha (y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y)$.

2. Siano $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+z^2 = 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ e $\omega = \cos(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + x(1+\sin(z))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Calcolare $\int_\Sigma \omega$.

3. Siano $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^4 = 1,\ z \geqslant 0\}$ e $\omega = y\,\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}x + x^3\cos(z)\,\mathrm{d}y$. Calcolare $\int_\Sigma \mathrm{d}\omega$.

4. Calcolare il massimo della funzione $x + 2y - z$ sotto il vincolo $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 29/24$.

5. Sia $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ tale che $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$, $a_0 = 5$ e $a_1 = 0$. Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} a_n$.

6. Sia $f(t) = \begin{cases} (t-\pi)^3 & \text{per } 0 < t \leqslant \pi \\ 0 & \text{per } t = 0 \\ (t+\pi)^3 & \text{per } -\pi \leqslant t < 0. \end{cases}$
Qual è il tipo di convergenza ad f della serie di Fourier di f?

7. Se $g(t) = f'(t-1)$ e $F = \mathcal{F}(f)$, $G = \mathcal{F}(g)$ sono le trasformate di Fourier, che legame c'è tra G e F?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 12/09/05 — Esercizî

1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia x_k la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \cdot \sin^2(t) - t^2 \\ x(0) = k\,. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Si dimostri che se $k \leqslant 1$ allora x_k è definita su $[0, +\infty)$. (Suggerimento: si usi il fatto che $\sin(t) \leqslant t$ per $t \geqslant 0$).

(B) (3 punti) Si dimostri che se $k \in [-1, 1]$ allora x_k è definita sull'intero asse reale.

(C) (3 punti) Si dimostri che per $k \leqslant 1$ si ha $\lim\limits_{t \to +\infty} x_k(t) = -\infty$

(D) (3 punti) Si dimostri che esiste un valore $k_0 > 1$ per cui x_{k_0} non è definita su $[0, \pi/2)$.

2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la funzione meromorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = \frac{e^{iaz}}{\cosh z}$.

(A) (4 punti) Si determinino i poli di f ed i relativi residui. (Attenzione: i poli di f sono in numero infinito).

Per ogni $R > 0$ siano ora $\gamma_R^1, \gamma_R^2, \gamma_R^3, \gamma_R^4$ i cammini a valori complessi così definiti:

$$\begin{aligned} &\gamma_R^1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_R^1(t) = t - i\pi, \qquad &&\gamma_R^2 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_R^2(t) = R + it, \\ &\gamma_R^3 : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_R^3(t) = -t + i\pi, \qquad &&\gamma_R^4 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_R^4(t) = -R - it. \end{aligned}$$

(B) (2 punti) Si mostri che per ogni $p, q \in \mathbb{R}$ si ha $|\cosh(p + iq)| \geqslant |\sinh p|$, e se ne deduca che $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{\gamma_R^2} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim\limits_{R \to \infty} \int_{\gamma_R^4} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(C) (3 punti) Si mostri che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\cosh(t \pm i\pi) = -\cosh t$, e se ne deduca che

$$\Re\left(\int_{\gamma_R^1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R^3} f(z)\,\mathrm{d}z \right) = -2 \sinh a\pi \cdot \int_{-R}^{R} \frac{\cos at}{\cosh t}\,\mathrm{d}t\,.$$

(D) (3 punti) Si calcoli $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at}{\cosh t}\,\mathrm{d}t$.

Risposte esatte

5. ♢

1. $11/3$

2. π

3. $-\pi/4$

4. $29/12$

5. Non esiste.

6. La convergenza è puntuale su $[-\pi, \pi]$ e uniforme su ogni insieme chiuso che non contenga 0

7. $G(x) = ix\,\mathrm{e}^{-ix}F(x)$

---

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡
