UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 29/05/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Calcolare $\int_\alpha xy$ dove $\alpha(t) = (2\cos t, \sqrt{3}\sin t)$, per $t \in [0, \pi/2]$.

2. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ f(x) = 0\}$.
È vero che se $\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| > 0$ su S allora S è una superficie? È vero il viceversa?

3. Trovare i punti stazionari in $\mathbb{R} \times [0, \pi/2]$ del sistema autonomo $\begin{cases} x' = x\cos y \\ y' = (x+1)\sin y \end{cases}$
ed indagarne la natura.

4. Risolvere $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$, $a_0 = 5$, $a_1 = 0$.

5. Sia $f(t) = t^2$ per $t \in [0, \pi]$ e $f(t) = -t^2$ per $t \in [-\pi, 0]$.
Calcolare i coefficienti di Fourier reali $a_1(f)$ e $b_1(f)$.

6. Se $\mathcal{F}(f)(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}$ e $\mathcal{F}(g)(t) = t^3\,\mathrm{e}^{-|t|}$, quanto fa $\mathcal{F}(f * g)(t)$?

7. La soluzione di $x' = x^4 - 2x^2t + t^2$, $x(0) = 0$ è definita su tutto $[0, +\infty)$?

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 29/05/04 — Esercizî

1. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = (1 + z)^2, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

(A) (2 punti) Mostrare che S è una superficie e trovarne una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Calcolare il volume di $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leqslant (1 + z)^2, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

(C) (3 punti) Sia $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Calcolare $\mathrm{d}\omega$.

(D) (4 punti) Calcolare $\int\limits_S \omega$.

2. Sia $f(z) = \frac{e^{iz^2}}{z(z^3+1)}$.

(A) (3 punti) Trovare i poli di f e calcolare i relativi residui (lasciando indicate le esponenziali che non si sanno calcolare esattamente).

Per $z, w \in \mathbb{C}$ sia $[z, w]$ il segmento che li congiunge. Per $r > 0$ sia $A_r = \{r\,\mathrm{e}^{i\theta} : \ \theta \in [0, \pi/2]\}$. Per $0 < r' < 1 < r''$ sia $C(r', r'') = [r', r''] \cup A_{r'} \cup [ir', ir''] \cup A_{r''}$.

(B) (3 punti) Per ogni $0 < r' < 1 < r''$ provare che esiste una curva chiusa $\alpha(r', r'')$ che ha supporto $C(r', r'')$ e calcolare $\int\limits_{\alpha(r',r'')} f(z)\,\mathrm{d}z$.

(C) (3 punti) Mostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(z) \geqslant 0$ e $\Im(z) \geqslant 0$ si ha $|f(z)| \leqslant \frac{1}{|z||z^3+1|}$. Dedurne che $\lim\limits_{r\to+\infty} \int\limits_{A_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(D) (3 punti) Mostrare che $\lim\limits_{r\to 0} \int\limits_{A_r} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi/2$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 29/05/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $16/\sqrt{3} - 6$

2. Sì, per il teorema del Dini. Il viceversa no: $f(x) = x_3$.

3. $(0, 0)$ repulsivo, $(-1, \pi/2)$ di sella

4. $2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n$

5. $a_1(f) = 0,\ b_1(f) = 2\pi - 8/\pi$

6. $t^5\, \mathrm{e}^{-(t^2+|t|)}$

7. Sì, resta dentro la parabola $t = x^2$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$