



 Matematica III — Scritto del 26/1/04 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Siano $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2)$ per $t \in [0, 1]$ e $\beta(t) = (t \cos(t), 0, t \sin(t))$ per $t \in [0, 2]$.
Quale delle due è più lunga?

2. Sia $\sigma(\vartheta, z) = (2(1-z) \cos \vartheta, (1-z) \sin(\vartheta), z)$ per $(\vartheta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$.
Calcolare $\int_{\sigma} dx dy + y dx dz + x dy dz$.

3. Trovare, se esiste, il punto di minimo di $(x+2)^2 + (z-1)^2$ su $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$.

4. Risolvere $a_{n+3} = -a_{n+2} + 10a_{n+1} - 8a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$.

5. $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$, $v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x, y, z)$.
Calcolare $\int_{\Omega} \operatorname{div}(v)$.

6. Sia $f(x) = e^{-ix^3/\pi^2}$ per $|x| \leq \pi$. La serie di Fourier di f converge a f uniformemente?

7. Se $g(t) = f(t+1)$, quanto fa $\frac{\mathcal{F}(g')(x)}{\mathcal{F}(f)(x)}$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1. Sia $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2 + y^2)^{1/2} = 1, 1/2 \leq z \leq 2\}$.

(A) (2 punti) Si dimostri che F è una superficie con bordo e se ne trovi una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Sia $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z^{-2}$. Si calcoli l'integrale di f su F .

(C) (2 punti) Si calcoli il volume dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2 + y^2)^{1/2} \leq 1, 1/2 \leq z \leq 2\}.$$

(D) (4 punti) Si calcoli l'integrale su F della forma

$$\omega = \sin z \, dx \, dy + (y \cos z + e^{x^2} \sin z) \, dx \, dz + (e^{y^2+z^2} + \operatorname{arctg}(y)) \, dy \, dz.$$

2. Sia $n \geq 1$ un numero intero e si consideri la funzione $f(z) = \frac{e^{i\pi z^n}}{1+z^{2n}}$.

(A) (3 punti) Si mostri che f è meromorfa su \mathbb{C} e si trovino le sue singolarità.

(B) (3 punti) Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \Im(z) \geq 0\}$. Si calcoli $\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz$.

(C) (3 punti) Si calcoli il residuo di f in ciascuna singolarità.

(D) (3 punti) Sia $R > 1$. Si calcoli l'integrale di f lungo la curva

$$C_R = \{t : t \in [0, R]\} \cup \{R e^{i\vartheta} : \vartheta \in [0, \pi/n]\} \cup \{t e^{i\pi/n} : t \in [0, R]\}.$$



Risposte esatte

5. \diamond

1. β
2. 2π
3. $(-3/2, 0, 3/2)$
4. $a_n = 2 - 2^n$
5. 2π
6. Sì
7. $ix e^{ix}$

1. \heartsuit 2. \clubsuit 3. \spadesuit 4. \diamondsuit 5. \diamondsuit 6. \spadesuit 7. \spadesuit 8. \diamondsuit 9. \clubsuit 10. \heartsuit
